

2016年医(医)・理(数理・物理・地環)・工・歯第7問

 数理
石井

7 次の各問いに答えよ。

(1) 複素数 z, w について、次の関係が成立することを示せ。ただし複素数 α に対し、 $\bar{\alpha}$ は α と共役な複素数を表す。

(i) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

(ii) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$

(2) 方程式 $z^2 - z + 1 = 0$ の2つの解を α, β とする。次の各問いに答えよ。

(i) α, β を求めよ。さらにそれらを極形式で表せ。(ii) $\alpha^{100} + \beta^{100}$ を求めよ。(i) $z = a+bi, w = c+di$ (a, b, c, d はすべて実数) とおくと。

(i) (左辺) $= \overline{(a+c) + (b+d)i}$

$= a+c - (b+d)i$

$= (a-bi) + (c-di)$

$= \bar{z} + \bar{w}$

$=$ (右辺) \square

(ii) (左辺) $= \overline{(a+bi)(c+di)}$

$= \overline{ac-bd + (ad+bc)i}$

$= ac-bd - (ad+bc)i$

(右辺) $= (a-bi)(c-di)$

$= ac-bd - (ad+bc)i$

\therefore (左辺) $=$ (右辺) \square

(2) 解の公式より

(i). $\alpha = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}, \beta = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ //

$\alpha = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}, \beta = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ //

(ii) ド・モアブルの定理より。

$\alpha^{100} + \beta^{100} = \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)^{100} + \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)^{100}$

$= \cos \frac{500\pi}{3} + i \sin \frac{500\pi}{3} + \cos \frac{100\pi}{3} + i \sin \frac{100\pi}{3}$

$= \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}$

$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$= -1$ //