2016年 第6問

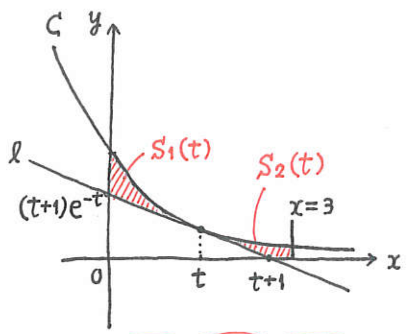


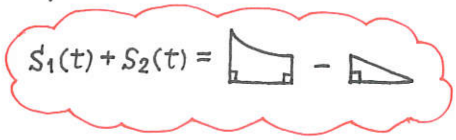
$\boxed{6}$ 関数 $y=e^{-x}$ で表される曲線を $C$ とする．また，$t$ は $0<t<2$ をみたす実数とし，$x=t$ における曲線 $C$ の接線を $\ell$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 接線 $\ell$ の方程式を求めよ．

(2) $y$ 軸，曲線 $C$ および接線 $\ell$ で囲まれた部分の面積を $S_1(t)$，$x$ 軸，直線 $x=3$，曲線 $C$ および接線 $\ell$ で囲まれた部分の面積を $S_2(t)$ とする．$S_1(t)+S_2(t)$ を求めよ．

(3) (2) で求めた $S_1(t)+S_2(t)$ の最小値を求めよ．




(1) $y'=-e^{-x}$ で接点は $(t,e^{-t})$ であるから，

$\ell: y=-e^{-t}(x-t)+e^{-t}$

$\therefore\ \underline{\ell: y=-e^{-t}\cdot x+(t+1)e^{-t}}$ //

(2) $\ell$ と $x$ 軸の交点の $x$ 座標は，

$-e^{-t}\cdot x+(t+1)e^{-t}=0$ より，

$-x+t+1=0 \quad \therefore x=t+1 \quad \therefore 1<x<3$

$$S_1(t)+S_2(t)=\int_0^3 e^{-x}dx-\frac{1}{2}\cdot(t+1)\cdot(t+1)e^{-t}$$

$$=\left[-e^{-x}\right]_0^3-\frac{1}{2}(t+1)^2e^{-t}$$

$$=\underline{1-\frac{1}{e^3}-\frac{1}{2}(t+1)^2e^{-t}} \ //$$

(3) $f(t)=S_1(t)+S_2(t)$ とおくと，

$$f'(t)=-\frac{1}{2}\cdot 2(t+1)e^{-t}+\frac{1}{2}(t+1)^2e^{-t}$$

$$=\frac{1}{2}(t+1)(t-1)e^{-t}$$

| $t$ | (0) | … | 1 | … | (2) |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | − | 0 | + | |
| $f(t)$ | | ↘ | | ↗ | |

$0<t<2$ の範囲で増減表をかくと右のようになる．

$$f(1)=1-\frac{1}{e^3}-\frac{2}{e}$$

$\therefore$ 最小値は $\underline{1-\frac{2}{e}-\frac{1}{e^3}\ (t=1\text{のとき})}$ //