0002264635377999

佐賀大学

2016年 医学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 実数 a，b は $a \geqq 0$，$b \geqq 0$，$a^2+b^2=1$ を満たしているとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 定積分

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}} |a\sin x - b\cos x|\,dx$$

を a，b を用いて表せ．

(2) S の最大値，最小値とそのときの a，b の値をそれぞれ求めよ．

(1) $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $a^2+b^2=1$ より

$a=\cos\theta$, $b=\sin\theta$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ とおける

$$\begin{aligned}
\therefore S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x\cos\theta - \cos x \sin\theta|\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(x-\theta)|\,dx \\
&= \int_0^{\theta} -\sin(x-\theta)\,dx + \int_\theta^{\frac{\pi}{2}} \sin(x-\theta)\,dx \\
&= \Big[\cos(x-\theta)\Big]_0^\theta + \Big[-\cos(x-\theta)\Big]_\theta^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 1-\cos(-\theta)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+1 \\
&= 2-\cos\theta-\sin\theta \\
&= \underline{2-a-b}
\end{aligned}$$

(2) (1)より, $S=2-\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$

$\frac{\pi}{4} \leqq \theta+\frac{\pi}{4} \leqq \frac{3}{4}\pi$

$\therefore$ S の最大値は 1 ($a=1$, $b=0$ または $a=0$, $b=1$ のとき)

最小値は $2-\sqrt{2}$ $\left(a=b=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{ のとき}\right)$