



2014年理系第2問

2  $a, b, c, d$  は  $a + d = 0$ ,  $ad - bc = 1$  をみたす実数とし,  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  とする. 次の問いに答えよ.

(1)  $A^2 = -E$  を示せ.

(2)  $p, q$  は実数で  $p^2 + q^2 \neq 0$  をみたすとする. 実数  $x, y$  に対して  $(pA + qE)(xA + yE) = E$  が成り立つとき,  $x, y$  を  $p, q$  で表せ.

(3)  $\theta$  を実数とする. すべての正の整数  $n$  に対して

$$\{(\cos \theta)E + (\sin \theta)A\}^n = (\cos n\theta)E + (\sin n\theta)A$$

が成り立つことを, 数学的帰納法を用いて証明せよ. ここで,  $(\sin \theta)A$  は行列  $A$  の  $\sin \theta$  倍を表す.