0001055454498999

岡山大学

2013年 理系 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 行列 $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ で定まる座標平面上の1次変換を f とする．ただし，a, b は実数とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 原点Oとは異なる点P$(x,\ y)$を f で移した点をQとする．このとき，長さの比の値 $\dfrac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}}$ はPによらないことを示し，その値を a, b を用いて表せ．

(2) 正の整数 n に対して，$A^n=\begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & s_n \end{pmatrix}$ とするとき，

$$p_n^2+r_n^2=(a^2+b^2)^n, \quad q_n^2+s_n^2=(a^2+b^2)^n$$

が成り立つことを示せ．

(3) $109^2=l^2+m^2$ を満たす正の整数 l, m を一組求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax-by \\ bx+ay \end{pmatrix}$ $\therefore$ Q$(ax-by,\ bx+ay)$

$\therefore \dfrac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}}=\dfrac{\sqrt{(ax-by)^2+(bx+ay)^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\underline{\sqrt{a^2+b^2}}$ //

x, y を含まないので
これは P によらない．

(2) $A^{n+1}=A\cdot A^n$ より．

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \\ r_{n+1} & s_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & s_n \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} ap_n-br_n & aq_n-bs_n \\ bp_n+ar_n & bq_n+as_n \end{pmatrix}$$

各成分を比較して．$p_{n+1}=ap_n-br_n$，$q_{n+1}=aq_n-bs_n$，$r_{n+1}=bp_n+ar_n$，$s_{n+1}=bq_n+as_n$

よって，$p_{n+1}^2+r_{n+1}^2=(ap_n-br_n)^2+(bp_n+ar_n)^2=(a^2+b^2)(p_n^2+r_n^2)$，$q_{n+1}^2+s_{n+1}^2=(aq_n-bs_n)^2+(bq_n+as_n)^2=(a^2+b^2)(q_n^2+s_n^2)$

$\therefore$ 数列 $\{p_n^2+r_n^2\}$，$\{q_n^2+s_n^2\}$ はともに初項 a^2+b^2，公比 a^2+b^2 の等比数列となる

よって．$p_n^2+r_n^2=q_n^2+s_n^2=(a^2+b^2)^n$ ▨

(3) (2)において．$n=2$，$a=10$，$b=3$ のときを考えると，

$p_2^2+r_2^2=109^2$，$q_2^2+s_2^2=109^2$ で，$A=\begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$

$\therefore A^2=\begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 91 & -60 \\ 60 & 91 \end{pmatrix}$ $\therefore p_2=91$，$r_2=60$

よって，$109^2=91^2+60^2$ 条件をみたす l, m の組の1つは．$\underline{l=91,\ m=60}$ //