

2015年理系1第2問

 数理  
5#1

2  $\triangle ABC$ において、 $AB = 7$ 、 $BC = 5$ 、 $AC = 8$ とし、 $\angle A$ の2等分線と辺  $BC$ の交点を  $D$ とする。

(1)  $BD = \frac{\boxed{\text{タ}}7}{\boxed{\text{チ}}3}$ である。

(2)  $AD = \frac{\boxed{\text{ツ}}8\sqrt{\boxed{\text{テ}}7}}{\boxed{\text{ト}}3}$ である。

(3)  $\triangle ABC$ の外接円の半径を  $R_1$ 、 $\triangle ABD$ の外接円の半径を  $R_2$ とすると、 $\frac{R_2}{R_1} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ナ}}7}}{\boxed{\text{ニ}}3}$ である。

(1)  $\angle ABC = \theta$ とする。

$$BD = \frac{7}{7+8} \times 5 = \frac{7}{3}$$

$AD$ は $\angle A$ の2等分線より、  
 $AB:AC = BD:DC$

(2)  $\triangle ABC$ において余弦定理より、

$$\cos \theta = \frac{5^2 + 7^2 - 8^2}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{1}{7}$$

$\therefore \triangle ABD$ において余弦定理より、

$$\begin{aligned} AD^2 &= 7^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^2 - 2 \cdot 7 \cdot \frac{7}{3} \cdot \cos \theta \\ &= 49 + \frac{49}{9} - \frac{14}{3} \\ &= \frac{448}{9} \end{aligned}$$

$$\therefore AD = \frac{8\sqrt{7}}{3}$$

(3) 正弦定理より、

$$\frac{8}{\sin \theta} = 2R_1 \quad \therefore R_1 = \frac{4}{\sin \theta}$$

$$\frac{AD}{\sin \theta} = 2R_2 \quad \therefore R_2 = \frac{4\sqrt{7}}{3 \sin \theta}$$

$$\therefore \frac{R_2}{R_1} = \frac{\frac{4\sqrt{7}}{3 \sin \theta}}{\frac{4}{\sin \theta}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

