2016年B方式（前期）第6問

数理
石井K

$\boxed{6}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がある．

$$a_1 = 1,\quad b_1 = 2,$$
$$a_{n+1} = a_n + 4b_n,\quad b_{n+1} = a_n - 2b_n$$

（1）数列 $\{a_n + b_n\}$，$\{a_n - 4b_n\}$ の一般項について，

$$a_n + b_n = \overset{3}{\boxed{ヘ}}\cdot\overset{2}{\boxed{ホ}}^{\,n-1},$$

$$a_n - 4b_n = -\underset{7}{\boxed{マ}}\,(-\underset{3}{\boxed{ミ}})^{n-1}$$

が成り立つ．

（2）数列 $\{a_n\}$ の一般項について，

$$a_n = \frac{\overset{1}{\boxed{ム}}\overset{2}{\boxed{メ}}\cdot\overset{2}{\boxed{モ}}^{\,n-1} - \overset{7}{\boxed{ヤ}}\cdot(-\overset{3}{\boxed{ユ}})^{n-1}}{\underset{5}{\boxed{ヨ}}}$$

が成り立つ．

（3）数列 $\{a_n\}$ の漸化式について，

$$a_{n+2} + \underset{1}{\boxed{ラ}}\,a_{n+1} - \underset{6}{\boxed{リ}}\,a_n = 0$$

が成り立つ．

(1) $a_{n+1} = a_n + 4b_n$ …① と $b_{n+1} = a_n - 2b_n$ …② の各辺を足し合わせて，

$a_{n+1} + b_{n+1} = 2(a_n + b_n)$

∴数列 $\{a_n + b_n\}$ は初項 $a_1 + b_1 = 3$，公比 2 の等比数列

$\therefore\ \underline{a_n + b_n = 3\cdot 2^{n-1}}$〃 …③

①−4×②より，$a_{n+1} - 4b_{n+1} = -3(a_n - 4b_n)$

∴数列 $\{a_n - 4b_n\}$ は初項 $a_1 - 4b_1 = -7$，公比 -3 の等比数列

$\therefore\ \underline{a_n - 4b_n = -7\cdot(-3)^{n-1}}$〃 …④

(2) 4×③+④より，

$5a_n = 12\cdot 2^{n-1} - 7\cdot(-3)^{n-1}$ $\qquad\therefore\ \underline{a_n = \dfrac{12\cdot 2^{n-1} - 7\cdot(-3)^{n-1}}{5}}$〃

(3) ①より，$b_n = \frac{1}{4}(a_{n+1} - a_n)$，$b_{n+1} = \frac{1}{4}(a_{n+2} - a_{n+1})$ これらを②に代入して，

$\frac{1}{4}(a_{n+2} - a_{n+1}) = a_n - 2\cdot\frac{1}{4}(a_{n+1} - a_n)$ $\qquad$ よって，$\underline{a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = 0}$〃