



2011年理系第3問

3 三角形OABにおいて、 $OA = \sqrt{10}$ 、 $OB = 1$ 、 $AB = \sqrt{5}$ とする。 $\vec{a} = \vec{OA}$ 、 $\vec{b} = \vec{OB}$ とおく。 n を整数とし、 $L = \left| \frac{1}{4}\vec{a} + n\vec{b} \right|^2$ を考える。

- (1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めなさい。
 (2) L を n で表しなさい。
 (3) L を最小にする整数 n を求めなさい。

(1) $\theta = \angle AOB$ とおくと、余弦定理より、

$$\cos \theta = \frac{10+1-5}{2 \cdot \sqrt{10} \cdot 1} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{OA}| |\vec{OB}| \cos \theta \\ &= \sqrt{10} \cdot 1 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} \\ &= \underline{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) L &= \frac{1}{16} |\vec{a}|^2 + \frac{n}{2} \vec{a} \cdot \vec{b} + n^2 |\vec{b}|^2 \\ &= \frac{5}{8} + \frac{3}{2}n + n^2 \\ &= \underline{n^2 + \frac{3}{2}n + \frac{5}{8}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) L &= \left(n + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{5}{8} \\ &= \left(n + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{16} \end{aligned}$$

n は整数より、 L を最小にする n は、 $n = -1$ 、