龍谷大学

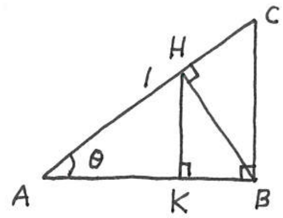
2013 年 文系 第 3 問

数理 石井K

$\boxed{3}$ $\angle B = 90°$ の直角三角形 ABC において，AC = 1，$\angle A = \theta$ とする．点 B から辺 AC に下ろした垂線と辺 AC の交点を H とする．さらに，点 H から辺 AB に下ろした垂線と辺 AB の交点を K とする．

(1) HK を θ をもちいて表しなさい．

(2) θ が変化するとき，HK の最大値を求めなさい．



(1) $AB = \cos\theta$, $BC = \sin\theta$ より $\triangle ABC$ の

面積 S は $S = \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$

一方，$S = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot BH$ と表せるので，$BH = \sin\theta\cos\theta$

ここで $\angle KHB = \theta$ より $\triangle ABC \overset{相似}{\backsim} \triangle HKB$

$\therefore BH : HK = 1 : \cos\theta$ $\quad\therefore \underline{HK = \sin\theta\cos^2\theta}$ //

(2) $f(\theta) = \sin\theta\cos^2\theta$ とおくと．$(0° < \theta < 90°)$

$f(\theta) = \sin\theta - \sin^3\theta$

ここで，$f(\theta)$ を $t = \sin\theta$ とおきなおしたものを $g(t)$ とすると，

$g(t) = t - t^3 \quad (0 < t < 1)$

$\therefore g'(t) = 1 - 3t^2$

$\therefore g'(t) = 0$ となるのは，$t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

t	(0)	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	(1)
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	(0)	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	(0)

$\therefore$ HK の最大値は $\underline{\frac{2\sqrt{3}}{9} \left(\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} のとき\right)}$ //