

2014年第5問

5 $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ として, 関数 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) を

$$f_1(x) = a_1 \sin \alpha x + b_1 \cos \alpha x$$

$$f_{n+1}(x) = \beta(f_n(x) + f_n'(x))$$

と定める. ただし, a_1, b_1, α, β は実数である. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $f_n(x)$ は $f_n(x) = a_n \sin \alpha x + b_n \cos \alpha x$ (a_n, b_n は実数) の形で表されることを示せ.
(2) (1)における a_n, b_n ($n = 1, 2, \dots$) について, 行列 P を用いて

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

と表すとき, 行列 P を求めよ.

- (3) $a_1 = 0, b_1 = 2, \alpha = \sqrt{3}, \beta = \frac{1}{2}$ とするとき, $f_{99}(x)$ を求めよ.