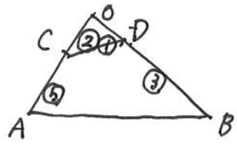
2014 年 薬学部 第 3 問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 三角形OABにおいて線分OAを2：5に内分する点をC，線分OBを1：3に内分する点をDとおく．このとき，次の問に答えなさい．



(1) $\overrightarrow{CD} = \dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}\overrightarrow{OA} + \dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}\overrightarrow{OB}$ である．　-2，7，1，4

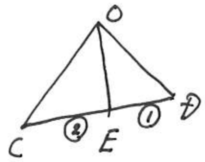
(2) 線分CDを2：1に内分する点をEとおくと $\overrightarrow{OE} = \dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キク}}\overrightarrow{OA} + \dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\overrightarrow{OB}$ である．　2，21，1，6

(3) 三角形OABは3辺の長さの比がOA：OB：AB＝5：4：7で，外接円の半径が $\dfrac{35\sqrt{6}}{12}$ とする．このとき $\cos\angle AOB = \dfrac{\boxed{サシ}}{\boxed{ス}}$ であり，また三角形OABの面積は $\boxed{セソ}\sqrt{\boxed{タ}}$ である．　-1，5，16，6

(4) α，β は実数で，点P，Qは $\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OQ} = \beta\overrightarrow{OB}$ を満たす点とする．3点P，E，Qが同一直線上にあり，$\overrightarrow{PD}$ と $\overrightarrow{CQ}$ が平行である．ただし点Pは点Cと異なるとするとき $\alpha = \dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}$，$\beta = \dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}$ である．　1，7

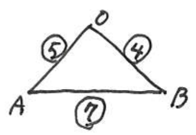
(1) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} - \frac{2}{7}\overrightarrow{OA}$ $\quad\therefore\ \overrightarrow{CD} = -\frac{2}{7}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$ //

(2) $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{7}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\overrightarrow{OB} = \frac{2}{21}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OB}$ //



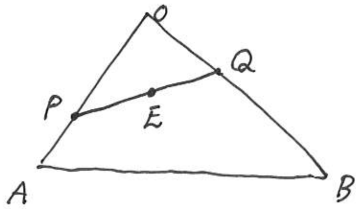
(3) 余弦定理より．$(7k)^2 = (5k)^2 + (4k)^2 - 2\cdot 20k^2\cos\angle AOB$

$\therefore\ \cos\angle AOB = -\frac{1}{5}$ //



$\sin\angle AOB = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ $\qquad \dfrac{7k}{\frac{2\sqrt{6}}{5}} = 2\cdot\frac{35\sqrt{6}}{12}$ より $k=2$

$\therefore\ S = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 8\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5} = 16\sqrt{6}$ //



(4) $\overrightarrow{PE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OP} = \left(\frac{2}{21} - \alpha\right)\overrightarrow{OA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = -\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$

P，E，Qが一直線上にあることから $\overrightarrow{PE} = k\overrightarrow{PQ}$ $\therefore$ $\begin{cases} \frac{2}{21} - \alpha = -k\alpha & \cdots① \\ \frac{1}{6} = k\beta & \cdots② \end{cases}$

また，$\overrightarrow{PD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} - \alpha\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{CQ} = \beta\overrightarrow{OB} - \frac{2}{7}\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{PD} \parallel \overrightarrow{CQ}$ より．$\frac{1}{4} : -\alpha = \beta : -\frac{2}{7}$ $\quad\therefore\ \alpha\beta = \frac{1}{14}\ \cdots③$

①②③より．$k = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ $\quad P \neq C$ より $k = \frac{1}{3}$ $\quad\therefore\ \alpha = \frac{1}{7},\ \beta = \frac{1}{2}$ //