



2016年 理学部（個別日程）第3問

3 次の条件を満たす実数の数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  を考える.

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 0, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

また,  $i$  を虚数単位とし, 複素数  $z_n$  を  $z_n = a_n + b_n i$  とする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1)  $z_{n+1} = \alpha z_n$  となる複素数  $\alpha$  を求めよ.
- (2) (1) で求めた複素数  $\alpha$  を極形式で  $\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  と表すとき,  $r$  と  $\theta$  を求めよ. ただし,  $0 \leq \theta < 2\pi$  とする.
- (3)  $n \geq 1$  に対して,  $z_n$  を極形式で  $z_n = r_n(\cos \theta_n + i \sin \theta_n)$  と表すとき,  $r_n$  と  $\theta_n$  を  $n$  を用いて表せ. ただし,  $\theta_n \geq 0$  とする.
- (4)  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$  を求めよ.
- (5)  $N$  を自然数とするとき,  $\sum_{n=1}^{4N} a_n$  を  $N$  を用いて表せ.