立教大学

2016 年 法・経済（経済政策） 第 2 問

$\boxed{2}$ 座標平面上における放物線 $C : y = x^2 - 2x + 1$ と直線 $\ell : y = x$ の 2 つの交点のうち，x 座標の値が小さい方の点を $\mathrm{A}(p,\ p)$ とする．直線 ℓ 上の点 $\mathrm{B}(1,\ 1)$ と点 A の間にある点 $\mathrm{D}(q,\ q)$ を通り y 軸と平行な直線と放物線 C との交点を E とし，点 E を通り x 軸と平行な直線と放物線 C とのもう 1 つの交点を F とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) p の値を求めよ．

(2) EF の長さを q を用いて表せ．

(3) 三角形 DEF の面積を q を用いて表せ．

(4) 点 D が線分 AB 上を動くとき，三角形 DEF の面積が最大となる q の値を求めよ．

(5) q が (4) で求めた値であるときの三角形 DEF の面積を求めよ．

(1) $x^2 - 2x + 1 - x = 0$

$\therefore x^2 - 3x + 1 = 0$

$\therefore x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

小さい方が P なので，$\underline{P = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}$ //

(2) C と $x = q$ の交点 E は，$E(q,\ q^2 - 2q + 1)$

C と $y = q^2 - 2q + 1$ の交点で E 以外のものが F なので

$x^2 - 2x + 1 - (q^2 - 2q + 1) = 0$

$\therefore (x - q)(x + q - 2) = 0 \quad \therefore F(2 - q,\ q^2 - 2q + 1)$

$\therefore EF = |q - (2 - q)| = \underline{2 - 2q}$ // $(\because q \leqq 1$ より$)$

(3) 底辺を EF とみると，高さは，$|q^2 - 2q + 1 - q|$

$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ においては，$x^2 - 3x + 1 \leqq 0$ である．

$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} = P \leqq q \leqq 1 < \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ より，$q^2 - 3q + 1 \leqq 0$

$\therefore \triangle DEF = \dfrac{1}{2}(2 - 2q)(-q^2 + 3q - 1) = \underline{q^3 - 4q^2 + 4q - 1}$ //

(4) (3) で求めた q の関数を $f(q)$ とおくと，

$f'(q) = 3q^2 - 8q + 4 = (3q - 2)(q - 2)$

$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \leqq q \leqq 1$ より 増減表は右になる．

q	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$f'(q)$		+	0	−	
$f(q)$		↗		↘	

$\therefore$ $\triangle DEF$ の面積が最大となる q は，$\underline{q = \dfrac{2}{3}}$ // 上に (5) をかいた．

(5)

$f(q) = (1 - q)(-q^2 + 3q - 1)$

$= (1 - q)\{-(q - 1)^2 + q\}$ より，

$f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{1}{3} \cdot \left(-\dfrac{1}{9} + \dfrac{2}{3}\right)$

$= \underline{\dfrac{5}{27}}$ //