0001848901518999

宮城教育大学

2014 年 教育学部 第 2 問

$\boxed{2}$ 関数

$$f(x)=\int_{-a}^{x}(a-|t|)\,dt$$

を考える．次の問いに答えよ．ただし，a は正の定数とする．

(1) $x \leqq 0$ と $x \geqq 0$ の場合に，関数 $f(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ．

(3) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 A の x 座標は負であり，点 A における曲線 $y=f(x)$ の接線の傾きが $-\sqrt{2}a$ であるとき，点 A の座標を求めよ．さらに，点 A を通って x 軸に平行な直線と曲線 $y=f(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(1) $x \leqq 0$ の場合．$f(x)=\int_{-a}^{x} a+t\,dt=\left[at+\frac{1}{2}t^2\right]_{-a}^{x}=ax+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}a^2$

$=\frac{1}{2}(x+a)^2$

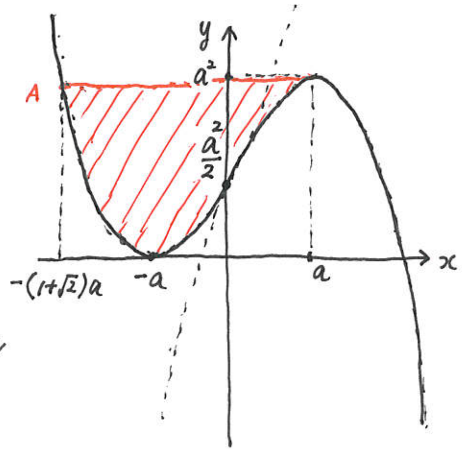
$x \geqq 0$ の場合 $f(x)=\int_{-a}^{0} a+t\,dt+\int_{0}^{x} a-t\,dt$

$=\left[at+\frac{1}{2}t^2\right]_{-a}^{0}+\left[at-\frac{1}{2}t^2\right]_{0}^{x}$

$=\frac{1}{2}a^2+ax-\frac{1}{2}x^2$

$\therefore f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x+a)^2 & (x \leqq 0 \text{ のとき})\\ \frac{1}{2}(a^2+2ax-x^2) & (x \geqq 0 \text{ のとき})\end{cases}$ //

(2) 下のグラフになる．



(3) $x<0$ では．$f(x)=\frac{1}{2}(x+a)^2$ より．

$f'(x)=x+a$ $\therefore f'(t)=-\sqrt{2}a$ となるのは

$t=-(1+\sqrt{2})a$ のとき $\therefore$ $\underline{A(-(1+\sqrt{2})a,\ a^2)}$ //

$\therefore$ 求める面積 S は．

$S=\int_{-(1+\sqrt{2})a}^{0} a^2-\frac{1}{2}(x+a)^2\,dx+\int_{0}^{a} a^2-\frac{1}{2}(a^2+2ax-x^2)\,dx$

$=\left[a^2x-\frac{1}{6}(x+a)^3\right]_{-(1+\sqrt{2})a}^{0}+\left[\frac{1}{6}(x-a)^3\right]_{0}^{a}$ $=\underline{\frac{3+2\sqrt{2}}{3}a^3}$ //