

2015年 歯学部 第2問



2  $\{a_n\}$  を初項  $a_1 = A$ , 公差  $d$  の等差数列とする. 自然数  $j$  と  $k$  に対して

$$S(j, k) = \sum_{i=j}^k a_i = a_j + a_{j+1} + a_{j+2} + \cdots + a_k$$

とおく.  $S(1, 10) = 800$ ,  $S(11, 20) = 200$  が成り立つとき, 次の問いに答えよ. ただし,  $j < k$  とする.

(1) 定数  $A$  と  $d$  の値を求めよ.

(2)  $\frac{S(n+1, n^2)}{n(n-1)} = \alpha n^2 + \beta n + \gamma$  をみたす定数  $\alpha, \beta, \gamma$  の値を求めよ.

(3)  $S(n+1, n^2) < 0$  となる  $n$  の最小値  $N$  の値を求めよ.

(4)  $T_n = \sum_{i=1}^n a_{5i}$  とおくとき, 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(T_n)^2}{S(n+1, n^2)}$  の値を求めよ.

$$(1) S(1, 10) = 800 \text{ より, } \frac{10}{2}(A + A + 9d) = 800 \quad \therefore 2A + 9d = 160 \cdots \textcircled{1}$$

$$S(11, 20) = 200 \text{ より, } \frac{10}{2}(A + 10d + A + 19d) = 200 \quad \therefore 2A + 29d = 40 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } \underline{d = -6, A = 107} //$$

$$(2) S(n+1, n^2) = \frac{n^2 - (n+1) + 1}{2} \{A + nd + A + (n^2 - 1)d\}$$

$$= \frac{1}{2} n(n-1)(220 - 6n^2 - 6n) \cdots \textcircled{3}$$

$$\therefore \frac{S(n+1, n^2)}{n(n-1)} = -3n^2 - 3n + 110 \quad \therefore \underline{d = -3, \beta = -3, \gamma = 110} //$$

(3)  $\textcircled{3}$  より.

$$S(n+1, n^2) < 0 \iff -3n^2 - 3n + 110 < 0$$

$$\iff n^2 + n - \frac{110}{3} > 0$$

$$f(n) = n^2 + n - \frac{110}{3} \quad (n = 1, 2, \dots) \text{ とおくと, } f(n) \text{ は単調増加で, } f(5) = -\frac{20}{3} < 0, f(6) = \frac{16}{3} > 0$$

$$\therefore \underline{N = 6} //$$

$$(4) a_n = 107 - 6(n-1) = -6n + 113 \quad \text{よって, } a_{5i} = -30i + 113$$

$$T_n = \sum_{i=1}^n (-30i + 113) = -15n(n+1) + 113n = -15n^2 + 98n$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(T_n)^2}{S(n+1, n^2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-15 + \frac{98}{n})^2}{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n})(\frac{220}{n^2} - 6 - \frac{6}{n})} = \underline{-75} //$$