0002046903597999

立教大学

2014年 理学部（個別日程） 第3問

数理 石井K

3 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ に対して，次の関係式が成り立っているものとする．

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & 0 \\ b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n & 0 \\ b_n & c_n \end{pmatrix} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，次の問に答えよ．

(1) a_n，c_n を n，a_1，c_1 を用いて表せ．
(2) b_{n+1} を n，a_1，b_n を用いて表せ．
(3) $d_n = \dfrac{b_n}{3^n}$ として数列 $\{d_n\}$ を定める．数列 $\{d_n\}$ が満たす漸化式を求めよ．
(4) d_n を n，a_1，b_1 を用いて表せ．
(5) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^n$ を n を用いて表せ．

(1) 行列の(1,1)成分を計算すると．$a_{n+1}=2a_n$ ∴数列 $\{a_n\}$ は初項 a_1，公比2の等比数列

∴ $\underline{a_n = a_1\cdot 2^{n-1}}$ //

同様に，(2,2)成分を計算すると．$c_{n+1}=3c_n$ ∴数列 $\{c_n\}$ は初項 c_1，公比3の等比数列

∴ $\underline{c_n = c_1\cdot 3^{n-1}}$ //

(2) 行列の(2,1)成分を計算して．$b_{n+1}=a_n+3b_n$ ∴(1)より．$\underline{b_{n+1}=3b_n+a_1\cdot 2^{n-1}}$ //

(3) (2)で求めた式の両辺を 3^{n+1} で割って．$\dfrac{b_{n+1}}{3^{n+1}} = \dfrac{b_n}{3^n}+\dfrac{a_1}{9}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

∴ $\underline{d_{n+1}=d_n+\dfrac{a_1}{9}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}}$ //

(4) 階差数列が $d_{n+1}-d_n=\dfrac{a_1}{9}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$ より．$d_n = d_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{a_1}{9}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1}$ $(n\geqq 2)$

∴ $d_n=\dfrac{b_1}{3}+\dfrac{a_1}{9}\cdot\dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{2}{3}}$ ∴ $\underline{d_n=\dfrac{a_1+b_1}{3}-\dfrac{a_1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}}$ // これは $n=1$ のときも成り立つ

(5) $\begin{pmatrix} a_{n+1} & 0 \\ b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n & 0 \\ b_n & c_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} a_{n-1} & 0 \\ b_{n-1} & c_{n-1} \end{pmatrix}=\cdots=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}$

∴ $a_1=2$，$b_1=1$，$c_1=3$ とすると．$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} a_n & 0 \\ b_n & c_n \end{pmatrix}$

このとき．$a_n=2^n$，$c_n=3^n$，$b_n=3^n\cdot d_n=3^n-2^n$ より．$\underline{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 3^n-2^n & 3^n \end{pmatrix}}$ //