岩手大学

2016年 人文社会科学 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 曲線 $y=-x^3+3x^2+x-3$ を C とし，曲線 C 上の点 $(3,\ 0)$ における接線を ℓ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) p を実数とし，点 $(p,\ q_1)$ は接線 ℓ 上にあり，点 $(p,\ q_2)$ は曲線 C 上にあるとする．$p<3$ の範囲を p が動くとき，q_1-q_2 の最大値を求めよ．

(3) 接線 ℓ と曲線 C で囲まれた図形は，y 軸によって2つの部分に分けられるが，それらの面積のうち小さい方を S，大きい方を T とするとき，$\dfrac{T}{S}$ の値を求めよ．

(1) $y'=-3x^2+6x+1$ より，

$\ell: y=-8(x-3)$ $\quad\therefore\ \underline{\ell: y=-8x+24}$ //

(2) (p, q_1) は ℓ 上の点より，$q_1=-8p+24$

(p, q_2) は C 上の点より，$q_2=-p^3+3p^2+p-3$

$\therefore\ q_1-q_2=-8p+24-(-p^3+3p^2+p-3)$

$=p^3-3p^2-9p+27$

これを $f(p)$ とおくと，$f'(p)=3p^2-6p-9$

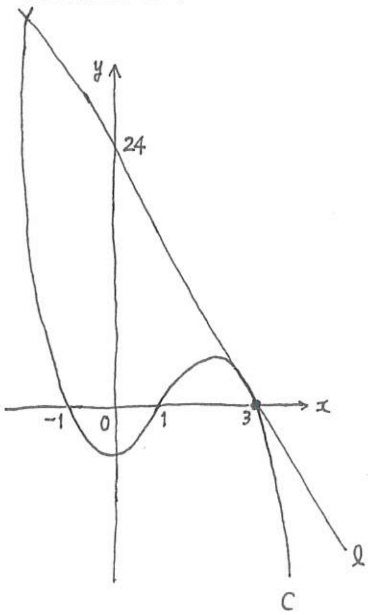
$=3(p-3)(p+1)$

p	$\cdots$	-1	$\cdots$	(3)
$f'(p)$	$+$	0	$-$	
$f(p)$	↗	32	↘	(0)

$\therefore$ 右の増減表より，q_1-q_2 の最大値は $\underline{32\ (p=-1 のとき)}$ //

(3) $C: y=-(x-1)(x+1)(x-3)$

$\therefore$ グラフは右のようになる．$q_1-q_2=(p-3)^2(p+3)$ より．交点は $(3,0), (-3,48)$



$$\int_{-3}^{0} -8x+24-(-x^3+3x^2+x-3)\,dx=\int_{-3}^{0} x^3-3x^2-9x+27\,dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-x^3-\frac{9}{2}x^2+27x\right]_{-3}^{0}$$

$$=\frac{297}{4}$$

$$\int_{0}^{3} -8x+24-(-x^3+3x^2+x-3)\,dx=\int_{0}^{3} x^3-3x^2-9x+27\,dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-x^3-\frac{9}{2}x^2+27x\right]_{0}^{3}$$

$$=\frac{135}{4}$$

$\therefore\ S=\dfrac{135}{4},\ T=\dfrac{297}{4}$ $\quad\therefore\ \dfrac{T}{S}=\dfrac{297}{135}=\underline{\dfrac{11}{5}}$ //