

2014年薬学部第3問

数理
石井K

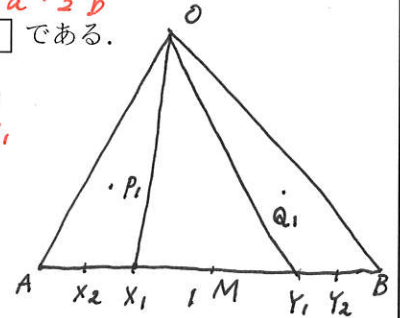
3 次の問いに答えなさい。

辺ABの長さが1の $\triangle OAB$ について、 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ で表す。 n を自然数とする。辺ABの中点をMとし、線分AMの中点を X_1 、線分 AX_1 の中点を X_2 , ..., 線分 AX_n の中点を X_{n+1} , ...とする。また、 $\triangle OAX_1$ の重心を P_1 , $\triangle OAX_2$ の重心を P_2 , ..., $\triangle OAX_n$ の重心を P_n , ...とする。同様に線分BMの中点を Y_1 、線分 BY_1 の中点を Y_2 , ..., 線分 BY_n の中点を Y_{n+1} , ...とし、 $\triangle OBY_1$ の重心を Q_1 , $\triangle OBY_2$ の重心を Q_2 , ..., $\triangle OBY_n$ の重心を Q_n , ...とする。

- (1) \vec{OX}_1 と \vec{P}_1Q_1 を \vec{a} , \vec{b} を用いて表すと、 $\vec{OX}_1 = \boxed{\text{I}}$, $\vec{P}_1Q_1 = \boxed{\text{J}}$ である。
 (2) 線分 AX_n の長さを n を用いて表すと、 $AX_n = \boxed{\text{K}}$ である。
 (3) \vec{P}_nQ_n は n , \vec{a} , \vec{b} を用いてどのように表されるかを求めなさい。
 (4) 線分 P_nQ_n の長さに関する不等式

$$0.666666 < P_nQ_n$$

を満たす最小の自然数 n は 19 である。ただし、 $\log_2 10 = 3.3219$ とする。



(1) $AX_1 : X_1B = 1 : 3$ より、 $\vec{OX}_1 = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$

$AX_2 : X_2B = 1 : 7$ より、 $\vec{OX}_2 = \frac{7}{8}\vec{a} + \frac{1}{8}\vec{b}$ $\therefore \vec{OP}_1 = \frac{14}{24}\vec{a} + \frac{1}{12}\vec{b}$

同様に $\vec{OQ}_1 = \frac{1}{12}\vec{a} + \frac{14}{24}\vec{b}$ $\therefore \vec{P}_1Q_1 = \vec{OQ}_1 - \vec{OP}_1 = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

(2) (1)と同様にして、 $\vec{OX}_n = \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\vec{a} + \frac{1}{2^{n+1}}\vec{b}$

$\therefore \vec{AX}_n = -\frac{1}{2^{n+1}}\vec{a} + \frac{1}{2^{n+1}}\vec{b}$ $\therefore |\vec{AX}_n|^2 = \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2 |\vec{AB}|^2 = \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2$

$\therefore AX_n = \frac{1}{2^{n+1}}$

(3) $\vec{OP}_n = \frac{2}{3}\vec{OX}_{n+1} = \frac{2}{3}\left(\frac{2^{n+2}-1}{2^{n+2}}\vec{a} + \frac{1}{2^{n+2}}\vec{b}\right) = \frac{2^{n+2}-1}{3 \cdot 2^{n+1}}\vec{a} + \frac{1}{3 \cdot 2^{n+1}}\vec{b}$

同様に $\vec{OQ}_n = \frac{1}{3 \cdot 2^{n+1}}\vec{a} + \frac{2^{n+2}-1}{3 \cdot 2^{n+1}}\vec{b}$ $\therefore \vec{P}_nQ_n = \frac{1-2^{n+1}}{3 \cdot 2^n}\vec{a} + \frac{2^{n+1}-1}{3 \cdot 2^n}\vec{b}$

(4) $\vec{P}_nQ_n = \frac{2^{n+1}-1}{3 \cdot 2^n}\vec{AB}$ $\therefore |P_nQ_n| = \frac{2^{n+1}-1}{3 \cdot 2^n}$

$\frac{2^{n+1}-1}{3 \cdot 2^n} > 0.666666$

$\Leftrightarrow 0.000002 \cdot 2^n > 1$

$\Leftrightarrow 2^n > 5 \times 10^5$

$\Leftrightarrow n > \log_2(5 \times 10^5)$

$\Leftrightarrow n > \log_2 10^6 - 1$

$\Leftrightarrow n > 6 \times 3.3219 - 1$

$n > 18.9 \dots$

$\therefore n = 19$