新潟大学

2014年第2問

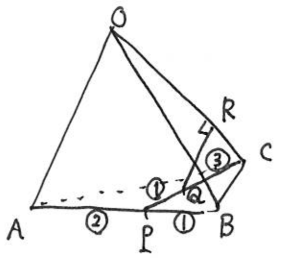
数理 石井K

$\boxed{2}$ 一辺の長さが1の正四面体OABCを考える．辺ABを2：1に内分する点をPとし，線分CPを3：1に内分する点をQとする．また，直線OC上の点Rを$\overrightarrow{QR} \perp \overrightarrow{OC}$となるようにとる．$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{OQ}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{QR}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{QR}$の大きさ$|\overrightarrow{QR}|$を求めよ．



(1) $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

$\therefore \overrightarrow{OQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{4}\vec{c}$

$= \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$ //

(2) $\overrightarrow{OR} = k\vec{c}$ とおく

$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ}$

$= -\frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \left(k - \frac{1}{4}\right)\vec{c}$

$\overrightarrow{QR} \perp \overrightarrow{OC}$ より $\overrightarrow{QR} \cdot \vec{c} = 0$ $\quad \therefore -\frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c} + \left(k - \frac{1}{4}\right)|\vec{c}|^2 = 0$

ここで，OABCは一辺が1の正四面体なので，$\vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{c} = 1\cdot1\cdot\cos 60° = \frac{1}{2}$，$|\vec{c}|^2 = 1$

$\therefore -\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + k - \frac{1}{4} = 0 \quad \therefore k = \frac{5}{8} \quad \therefore \overrightarrow{QR} = -\frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{3}{8}\vec{c}$ //

(3) $|\overrightarrow{QR}|^2 = \frac{1}{16}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 + \frac{9}{64}|\vec{c}|^2 + \frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{b} - \frac{3}{16}\vec{a}\cdot\vec{c} - \frac{3}{8}\vec{b}\cdot\vec{c}$

$= \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{9}{64} + \frac{1}{8} - \frac{3}{32} - \frac{3}{16}$

$= \frac{19}{64}$

$\therefore |\overrightarrow{QR}| = \frac{\sqrt{19}}{8}$ //