2015年 理系 第4問　　1枚目／3枚　　数理 石井K

4　Oを原点とする座標空間内に点A(0, 0, 1), B(1, 0, 1), C(1, 1, 1)が与えられている．線分OCを1つの対角線とし，線分ABを一辺とする立方体を直線OCの周りに回転して得られる回転体Kの体積を求めたい．次の問いに答えよ．

(1) 点P(0, 0, p) ($0 < p \leqq 1$)から直線OCへ垂線を引いたときの交点Hの座標と線分PHの長さを求めよ．

(2) 点Q(q, 0, 1) ($0 \leqq q \leqq 1$)から直線OCへ垂線を引いたときの交点Iの座標と線分QIの長さを求めよ．

(3) 原点Oから点C方向へ線分OC上を距離u ($0 \leqq u \leqq \sqrt{3}$)だけ進んだ点をUとする．点Uを通り直線OCに垂直な平面でKを切ったときの切り口の円の半径rをuの関数として表せ．

(4) Kの体積を求めよ．

(1) 点Hは直線OC上にあるので，H(k, k, k)と表せる．

$\overrightarrow{PH} = (k, k, k-p)$，$\overrightarrow{OC} = (1, 1, 1)$ で，

PH ⊥ OC より $\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ なので $\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{OC} = 3k - p = 0$

$\therefore k = \frac{p}{3}$　$\therefore \underline{H\left(\frac{p}{3}, \frac{p}{3}, \frac{p}{3}\right)}$ //　このとき，$\overrightarrow{PH} = \left(\frac{p}{3}, \frac{p}{3}, -\frac{2}{3}p\right)$ なので

$\underline{|\overrightarrow{PH}| = \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}p\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}p}$ //

(2) I(l, l, l)とおくと，$\overrightarrow{QI} = (l-q, l, l-1)$

QI ⊥ OC より．$\overrightarrow{QI} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ なので $\overrightarrow{QI} \cdot \overrightarrow{OC} = l - q + l + l - 1 = 0$

$\therefore l = \frac{q+1}{3}$　$\therefore \underline{I\left(\frac{q+1}{3}, \frac{q+1}{3}, \frac{q+1}{3}\right)}$ //　このとき，$\overrightarrow{QI} = \left(\frac{-2q+1}{3}, \frac{q+1}{3}, \frac{q-2}{3}\right)$

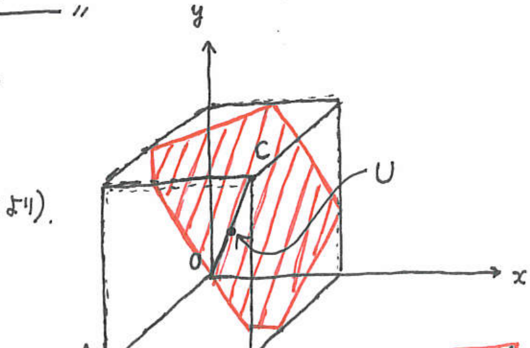
$\therefore |\overrightarrow{QI}| = \sqrt{\left(\frac{-2q+1}{3}\right)^2 + \left(\frac{q+1}{3}\right)^2 + \left(\frac{q-2}{3}\right)^2} = \underline{\frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \sqrt{q^2 - q + 1}}$ //

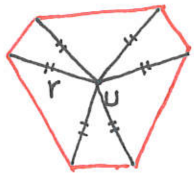
(3) 点Uを通り．OCに垂直な平面で立方体を切ると．

切断面は凸多角形となる．この凸多角形の

頂点とUとのキョリはすべて等しい（図形の対称性より）．

このキョリがrになる．





実際には
切断面は，六角形
または正三角形となる．

2枚目につづく

0002065904397999

大阪市立大学

2015年 理系 第4問　2枚目／3枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ Oを原点とする座標空間内に点A(0, 0, 1)，B(1, 0, 1)，C(1, 1, 1)が与えられている．線分OCを1つの対角線とし，線分ABを一辺とする立方体を直線OCの周りに回転して得られる回転体Kの体積を求めたい．次の問いに答えよ．

(1) 点P(0, 0, p) $(0 < p \leqq 1)$から直線OCへ垂線を引いたときの交点Hの座標と線分PHの長さを求めよ．

(2) 点Q(q, 0, 1) $(0 \leqq q \leqq 1)$から直線OCへ垂線を引いたときの交点Iの座標と線分QIの長さを求めよ．

(3) 原点Oから点C方向へ線分OC上を距離u $(0 \leqq u \leqq \sqrt{3})$だけ進んだ点をUとする．点Uを通り直線OCに垂直な平面でKを切ったときの切り口の円の半径rをuの関数として表せ．

(4) Kの体積を求めよ．

(3)のつづき

(i) 切断面の多角形の頂点の1つが辺OA上にくるとき

(1)のHをUとして考える．$u = \sqrt{3}\cdot\dfrac{p}{3}$ で $0 < p \leqq 1$ より．$0 < u \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき．

このとき．$r = |\overrightarrow{PH}| = \dfrac{\sqrt{6}}{3}p = \sqrt{2}u$　これは $u=0$ のときも成り立つ

(ii) 切断面の多角形の頂点の1つが辺AB上にくるとき．

(2)のIをUとして考える．$u = \sqrt{3}\cdot\dfrac{q+1}{3} = \dfrac{q+1}{\sqrt{3}}$ で，$0 \leqq q \leqq 1$ より．$0 \leqq \sqrt{3}u - 1 \leqq 1$

↳すなわち．$\dfrac{\sqrt{3}}{3} \leqq u \leqq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき．

このとき．$r = |\overrightarrow{QI}| = \dfrac{\sqrt{6}}{3}\cdot\sqrt{(\sqrt{3}u-1)^2-(\sqrt{3}u-1)+1}$

$\therefore r = \sqrt{2(u^2-\sqrt{3}u+1)}$

(iii) それ以外のとき．すなわち．$\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \leqq u \leqq \sqrt{3}$ のとき．

$CU = \sqrt{3}-u$，　$0 \leqq \sqrt{3}-u \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ であり．

図形の対称性より．(i)において u を $\sqrt{3}-u$ におきかえればよい．

$$\therefore r = \sqrt{2}(\sqrt{3}-u) = \sqrt{6}-\sqrt{2}u$$

(i)〜(iii)より．

$$r = \begin{cases} \sqrt{2}u & \left(0 \leqq u \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{3} \text{ のとき}\right) \\ \sqrt{2(u^2-\sqrt{3}u+1)} & \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3} \leqq u \leqq \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \text{ のとき}\right) \\ \sqrt{6}-\sqrt{2}u & \left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \leqq u \leqq \sqrt{3} \text{ のとき}\right) \end{cases}$$ ——//

3枚目につづく

0002065904397999

大阪市立大学

2015年 理系 第4問　　3枚目／3枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ Oを原点とする座標空間内に点A(0, 0, 1), B(1, 0, 1), C(1, 1, 1)が与えられている．線分OCを1つの対角線とし，線分ABを一辺とする立方体を直線OCの周りに回転して得られる回転体Kの体積を求めたい．次の問いに答えよ．

(1) 点P(0, 0, p) ($0 < p \leqq 1$)から直線OCへ垂線を引いたときの交点Hの座標と線分PHの長さを求めよ．

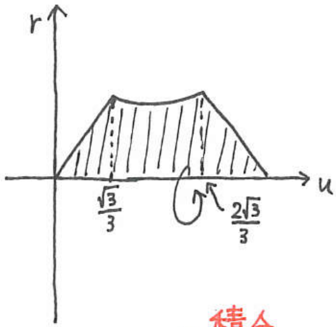
(2) 点Q(q, 0, 1) ($0 \leqq q \leqq 1$)から直線OCへ垂線を引いたときの交点Iの座標と線分QIの長さを求めよ．

(3) 原点Oから点C方向へ線分OC上を距離u ($0 \leqq u \leqq \sqrt{3}$)だけ進んだ点をUとする．点Uを通り直線OCに垂直な平面でKを切ったときの切り口の円の半径rをuの関数として表せ．

(4) Kの体積を求めよ．

(4) Kの体積をVとおく．

Kは2つの円すい部分とそれにはさまれる部分に分けられるので，



$$V = \pi\cdot\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 2 + \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \pi\cdot 2(u^2-\sqrt{3}u+1)\,du$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{27}\pi + 2\pi\left[\frac{u^3}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}u^2 + u\right]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{27}\pi + 2\pi\left(\frac{8}{9\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{27}\pi + \frac{5\pi}{9\sqrt{3}}$$

$$= \underline{\frac{\sqrt{3}}{3}\pi}$$ //