

2010年理系第4問

4  $a, b$  は  $a < b$  をみたす実数とする.  $f(x), g(x)$  は閉区間  $[a, b]$  で定義された連続関数で,  $g(x) \leq f(x)$  をみたすとする. 座標平面上, 不等式  $a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)$  をみたす点  $(x, y)$  全体からなる図形を  $A$  とする.  $A$  の面積  $S$  が正のとき,  $A$  の重心の  $y$  座標は,

$$\frac{1}{S} \int_a^b \frac{\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2}{2} dx$$

で与えられる. この事実を用いて, 次の問いに答えよ.

- (1)  $r$  は  $0 < r < 1$  をみたす実数とする. 不等式  $r^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0$  をみたす点  $(x, y)$  全体からなる図形を  $B$  とおく.  $B$  の重心の  $y$  座標  $Y(r)$  を  $r$  を用いて表せ.
- (2)  $t$  は正の実数とする. 不等式  $-1 \leq x \leq 1, \sqrt{1-x^2} - t \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$  をみたす点  $(x, y)$  全体からなる図形を  $C$  とおく.  $C$  の重心の  $y$  座標  $Z(t)$  を  $t$  を用いて表せ.
- (3) (1) で得られた  $Y(r)$  と (2) で得られた  $Z(t)$  について,  $\lim_{r \rightarrow 1-0} Y(r)$  と  $\lim_{t \rightarrow +0} Z(t)$  の大小を比較せよ.