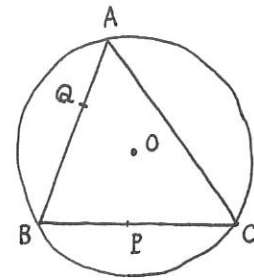


2015年 第2問


 数理
石井

2 $\triangle ABC$ の外接円の中心を O とし、半径を 1 とする. 辺 BC の中点を P , 辺 AB を $1:2$ に内分する点を Q とするとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ とおくと, \vec{PQ} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ.
 (2) (1) における \vec{PQ} は, $\vec{a} + \vec{b}$ と平行で向きが同じとする. $|\vec{PQ}| : |\vec{a} + \vec{b}| = s : 1$ とするとき, $\vec{a} \cdot \vec{c}$ と $\vec{b} \cdot \vec{c}$ を, それぞれ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ と s を用いて表せ.
 (3) (2) において, さらに $s = \frac{1}{6}$ であるとき, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求めよ.



$$(1) \vec{OP} = \frac{1}{2} \vec{OB} + \frac{1}{2} \vec{OC}, \quad \vec{OQ} = \frac{2}{3} \vec{OA} + \frac{1}{3} \vec{OB}$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{PQ} &= \vec{OQ} - \vec{OP} \\ &= \frac{2}{3} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} - \left(\frac{1}{2} \vec{b} + \frac{1}{2} \vec{c} \right) \\ &= \frac{2}{3} \vec{a} - \frac{1}{6} \vec{b} - \frac{1}{2} \vec{c} \end{aligned} //$$

$$(2) \vec{PQ} \parallel \vec{a} + \vec{b} \text{ (同じ向き) } \text{かつ } |\vec{PQ}| : |\vec{a} + \vec{b}| = s : 1 \text{ より.}$$

$$\vec{PQ} = s \vec{a} + s \vec{b}$$

$$\therefore (1) \text{ より, } \frac{2}{3} \vec{a} - \frac{1}{6} \vec{b} - \frac{1}{2} \vec{c} = s \vec{a} + s \vec{b}$$

$$\therefore \vec{c} = \left(\frac{4}{3} - 2s \right) \vec{a} - \left(\frac{1}{3} + 2s \right) \vec{b} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{a} \cdot \vec{c} &= \vec{a} \cdot \left\{ \left(\frac{4}{3} - 2s \right) \vec{a} - \left(\frac{1}{3} + 2s \right) \vec{b} \right\} \\ &= \left(\frac{4}{3} - 2s \right) |\vec{a}|^2 - \left(\frac{1}{3} + 2s \right) \vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= \frac{4}{3} - 2s - \left(\frac{1}{3} + 2s \right) \vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned} //$$

$$\begin{aligned} \vec{b} \cdot \vec{c} &= \vec{b} \cdot \left\{ \left(\frac{4}{3} - 2s \right) \vec{a} - \left(\frac{1}{3} + 2s \right) \vec{b} \right\} \\ &= \left(\frac{4}{3} - 2s \right) \vec{a} \cdot \vec{b} - \left(\frac{1}{3} + 2s \right) |\vec{b}|^2 \\ &= \left(\frac{4}{3} - 2s \right) \vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{3} - 2s \end{aligned} //$$

$$(3) s = \frac{1}{6} \text{ のとき, } \textcircled{1} \text{ より, } \vec{c} = \vec{a} - \frac{2}{3} \vec{b} \quad \therefore |\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + \frac{4}{9} |\vec{b}|^2 - \frac{4}{3} \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\therefore 1 = 1 + \frac{4}{9} - \frac{4}{3} \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{3} //$$