大阪市立大学

2015年 理系 第2問　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 関数 $f(x)$, $g(x)$ を $f(x)=e^{-x}\sin x$, $g(x)=e^{-x}\cos x$ とおく．$f(x)$, $g(x)$ の不定積分を $I=\int f(x)\,dx$, $J=\int g(x)\,dx$ とおく．k を自然数とし，$(k-1)\pi \leqq x \leqq k\pi$ において，2つの曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$，および2直線 $x=(k-1)\pi$, $x=k\pi$ で囲まれる2つの部分の面積の和を S_k とおく．次の問いに答えよ．

(1) $I=J+F(x)+C_1$, $J=-I+G(x)+C_2$ を満たす関数 $F(x)$, $G(x)$ を求めよ．ただし，C_1, C_2 は積分定数である．

(2) I, J を求めよ．

(3) S_k を求めよ．

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ を求めよ．

(1)
$$
\begin{aligned}
I-J &= \int f(x)-g(x)\,dx \\
&= \int e^{-x}(\sin x-\cos x)\,dx \\
&= \int (-e^{-x})'(\sin x-\cos x)\,dx \\
&= -e^{-x}(\sin x-\cos x)+\int e^{-x}(\cos x+\sin x)\,dx \\
&= -e^{-x}(\sin x-\cos x)+\int (-e^{-x})'(\cos x+\sin x)\,dx \\
&= -e^{-x}(\sin x-\cos x)-e^{-x}(\cos x+\sin x)+\int e^{-x}(\cos x-\sin x)\,dx \\
&= -2e^{-x}\sin x-(I-J)+C_1
\end{aligned}
$$

$\therefore\ I-J=-e^{-x}\sin x+C_1 \cdots ①$ $\therefore\ \underline{F(x)=-e^{-x}\sin x}$ //

同様にして．

$$
\begin{aligned}
I+J &= \int e^{-x}(\sin x+\cos x)\,dx \\
&= -2e^{-x}\cos x-(I+J)+C_2
\end{aligned}
$$

$\therefore\ I+J=-e^{-x}\cos x+C_2 \cdots ②$ $\therefore\ \underline{G(x)=-e^{-x}\cos x}$ //

(2) ①，②より． $\underline{I=-\dfrac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)+C_3,\quad J=\dfrac{e^{-x}}{2}(\sin x-\cos x)+C_4}$ //

（C_3, C_4 は積分定数）

0002065724397999

大阪市立大学

2015年 理系 第2問　　2枚目／2枚　　数理 石井K

2 関数 $f(x)$, $g(x)$ を $f(x) = e^{-x}\sin x$, $g(x) = e^{-x}\cos x$ とおく．$f(x)$, $g(x)$ の不定積分を $I = \int f(x)\,dx$, $J = \int g(x)\,dx$ とおく．k を自然数とし，$(k-1)\pi \leqq x \leqq k\pi$ において，2つの曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$, および2直線 $x = (k-1)\pi$, $x = k\pi$ で囲まれる2つの部分の面積の和を S_k とおく．次の問いに答えよ．

(1) $I = J + F(x) + C_1$, $J = -I + G(x) + C_2$ を満たす関数 $F(x)$, $G(x)$ を求めよ．ただし，C_1, C_2 は積分定数である．

(2) I, J を求めよ．

(3) S_k を求めよ．

(4) $\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ を求めよ．

(3) $f(x) - g(x) = e^{-x}(\sin x - \cos x)$

$= \sqrt{2}e^{-x}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

∴ $f(x)$ と $g(x)$ の大小は，$x = (k-1)\pi + \frac{\pi}{4}$ のとき入れかわる．

$\int f(x) - g(x)\,dx = I - J = -e^{-x}\sin x + C_1$ より．

$$S_k = \left| \int_{(k-1)\pi}^{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}} f(x) - g(x)\,dx + \int_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi} g(x) - f(x)\,dx \right|$$

$$= \left| \left[-e^{-x}\sin x\right]_{(k-1)\pi}^{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}} - \left[-e^{-x}\sin x\right]_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi} \right|$$

$$= \left| -e^{-(k-1)\pi-\frac{\pi}{4}}\sin\left\{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}\right\} - e^{-(k-1)\pi-\frac{\pi}{4}}\sin\left\{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}\right\} \right|$$

$$= 2e^{-(k-1)\pi-\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \underline{\sqrt{2}e^{-(k-1)\pi-\frac{\pi}{4}}}\,/\!/$$

(4) $\sum_{k=1}^{\infty} S_k = \sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e^{\pi}}\right)^k$

初項 $\frac{1}{e^{\pi}}$，公比 $\frac{1}{e^{\pi}}$，$\left(0 < \frac{1}{e^{\pi}} < 1\right)$ の等比数列の和 → 収束

$= \sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi} \cdot \dfrac{\frac{1}{e^{\pi}}}{1 - \frac{1}{e^{\pi}}} = \underline{\dfrac{\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi}}{e^{\pi} - 1}}\,/\!/$