0002101638987999

大阪歯科大学

2015年 歯学部 第3問

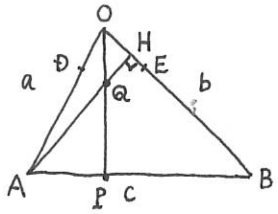
数理 石井K

$\boxed{3}$ △AOBの頂点Aから辺OBに下ろした垂線の足をHとする．OA $= a$，OB $= b$，AB $= c$（ただし，$a < b$），$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ として，OA上に点Dを，OB上に点EをOD $=$ OE $= \dfrac{a}{4}$ となるようにとる．以下の問に答えよ．

(1) $\cos(\angle \mathrm{AOB})$ を a，b，c で表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} + \overrightarrow{\mathrm{OE}}$ となるように点Fをとる．OFの延長とABの交点をPとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を使って表せ．

(3) OPとAHの交点をQとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を使って表せ．



(1) 余弦定理より

$$\cos(\angle \mathrm{AOB}) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$ //

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{1}{4}\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \dfrac{\frac{1}{4}a}{b}\vec{b} = \dfrac{a}{4b}\vec{b}$

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{OF}} = \dfrac{1}{4}\vec{a} + \dfrac{a}{4b}\vec{b}$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{k}{4}\vec{a} + \dfrac{ka}{4b}\vec{b}$ と表せる

点Pが直線AB上にあることより，$\dfrac{k}{4} + \dfrac{ka}{4b} = 1$ $\quad \therefore k = \dfrac{4b}{a+b}$

$$\therefore \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{b}{a+b}\vec{a} + \frac{a}{a+b}\vec{b}$$ //

(3) 3点O, Q, Pは一直線上にあるから $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = m'\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と表せる

ここで，$\dfrac{m'}{a+b} = m$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = mb\vec{a} + ma\vec{b}$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \vec{a} = (mb-1)\vec{a} + ma\vec{b}$

AH ⊥ OB $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} \perp \vec{b}$ $\quad$ よって，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} \cdot \vec{b} = 0$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AQ}} \cdot \vec{b} &= (mb-1)\vec{a}\cdot\vec{b} + ma|\vec{b}|^2 \\ &= (mb-1)\cdot ab \cdot \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + mab^2 \\ &= \frac{1}{2}\left\{((a+b)^2-c^2)mb - (a^2+b^2-c^2)\right\} \qquad \therefore m = \frac{a^2+b^2-c^2}{b\{(a+b)^2-c^2\}}\end{aligned}$$

$$\therefore \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{a^2+b^2-c^2}{(a+b)^2-c^2}\cdot\left(\vec{a} + \frac{a}{b}\vec{b}\right)$$ //