0002128091787999

名城大学

2015年 理工学部 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = 2^{n+1} - 3$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定める．このとき，定積分

$$I_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} \{\log(x+3) - n\log 2\}\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

について，次の問に答えよ．

(1) $a_{n+1} = \alpha a_n + \beta$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ が成り立つように，定数 α, β の値を定めよ．

(2) $x = \alpha t + \beta$ と置くことにより，$I_{n+1} = \alpha I_n$ が成り立つことを示せ．

(3) I_1 を求めよ．

(4) I_n を求めよ．

(1) $2^{n+2} - 3 = \alpha(2^{n+1} - 3) + \beta$

$\therefore\ 2^{n+1}(2 - \alpha) - 3 + 3\alpha - \beta = 0$

これがすべての自然数 n について成り立つので

$\alpha = 2$ かつ $-3 + 3\alpha - \beta = 0$

$\therefore\ \underline{\alpha = 2,\ \beta = 3}$ //

(2) $I_{n+1} = \int_{a_{n+1}}^{a_{n+2}} \{\log(x+3) - (n+1)\log 2\}\,dx$

$x = 2t + 3$ とおいて置換積分する．$dx = 2dt$, $\begin{array}{c|c} x & a_{n+1} \to a_{n+2} \\ \hline t & a_n \to a_{n+1} \end{array}$ (1)より．

$$\therefore\ I_{n+1} = \int_{a_n}^{a_{n+1}} \{\log(2t+6) - (n+1)\log 2\}\cdot 2\,dt$$

$$= \int_{a_n}^{a_{n+1}} \{\log(t+3) + \log 2 - (n+1)\log 2\}\cdot 2\,dt$$

$$= 2\int_{a_n}^{a_{n+1}} \{\log(t+3) - n\log 2\}\,dt$$

$$= 2I_n \quad ▨$$

(3) $a_1 = 1$, $a_2 = 5$ より，

$$I_1 = \int_1^5 \{(x+3)'\log(x+3) - \log 2\}\,dx$$

$$= \Big[(x+3)\log(x+3) - x\log 2\Big]_1^5 - \int_1^5 dx$$

$$= 8\log 8 - 5\log 2 - 4\log 4 + \log 2 - 4$$

$= \underline{12\log 2 - 4}$ //

(4) (2)(3)より $\{I_n\}$ は初項 $12\log 2 - 4$, 公比 2 の等比数列であるから，

$$I_n = (12\log 2 - 4)\cdot 2^{n-1}$$

$= \underline{(3\log 2 - 1)\cdot 2^{n+1}}$ //