愛知教育大学

2013年 第9問

9 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}(\log(n+k)-\log n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n+k}\log\frac{n+k}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\log(1+x)\,dx$$

ここで，$S=\int_0^1 \frac{1}{1+x}\log(1+x)\,dx$ とおくと，

$$S = \int_0^1 \{\log(1+x)\}'\log(1+x)\,dx$$

$$= \left[\{\log(1+x)\}^2\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x}\log(1+x)\,dx$$

$$= (\log 2)^2 - S$$

$$\therefore\ 2S = (\log 2)^2$$

$$\therefore\ \underline{S = \frac{1}{2}(\log 2)^2}\ //$$