

2015年第3問

3  $a, b$  は  $0 < a < b$  を満たす定数とし、関数  $y = \log x$  のグラフを  $G$  とする。点  $C$  が曲線  $G$  上を点  $A(a, \log a)$  から点  $B(b, \log b)$  まで動くとき、点  $C$  から  $x$  軸への垂線と線分  $AB$  との交点を  $P$  とし、線分  $CP$  の長さの最大値を  $L$  とする。このとき、以下の問に答えよ。ただし、 $\log x$  は自然対数を表すものとする。

- (1) 不等式  $a < \frac{b-a}{\log b - \log a} < b$  が成り立つことを証明せよ。
- (2)  $h = \frac{b}{a}$  とおくとき、 $L$  を  $h$  を用いて表せ。
- (3) 実数  $p, q, r$  が  $a < p < b, a < q < b, a < r < b$  を満たすとき、不等式

$$\frac{p+q+r}{3} < e^L \sqrt[3]{pqr}$$

が成り立つことを証明せよ。ただし、 $e$  は自然対数の底とする。