鹿児島大学

2016年 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)=\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}$ について，次の各問いに答えよ．

(1) 導関数 $f'(x)$ および2次導関数 $f''(x)$ をそれぞれ求めよ．

(2) $x \geqq 0$ において $f'(x) \geqq 0$ および $f(x) \geqq 0$ が成り立つことを示せ．

(3) $f(x)$ の定積分を利用して $\sin 1 \geqq \dfrac{5}{6}$ を示せ．

(1) $\underline{f'(x) = -\sin x + x}$ //　$\underline{f''(x) = 1-\cos x}$ //

(2) $-1 \leqq \cos x \leqq 1$ より，$f''(x) \geqq 0$

よって，$f'(x)$ は単調増加

$\therefore\ f'(x) \geqq f'(0) = 0 \quad (x \geqq 0)$

これより，$x \geqq 0$ において，$f(x)$ は単調増加で

$f(x) \geqq f(0) = 0$ ▨

(3) (2)より，$x \geqq 0$ において，$\cos x \geqq 1-\dfrac{x^2}{2}$ であるから

区間 $[0,1]$ において，両辺積分すると，

$$\int_0^1 \cos x \, dx \geqq \int_0^1 1-\frac{x^2}{2} \, dx$$

$$\therefore\ \Big[\sin x\Big]_0^1 \geqq \Big[x-\frac{x^3}{6}\Big]_0^1$$

$$\therefore\ \sin x \geqq \frac{5}{6}$$ ▨