0001981818108999

# 横浜国立大学



2015年 理工 第1問

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．

(1) 定積分

$$\int_0^{\log 3} \frac{dx}{e^x + 5e^{-x} - 2}$$

を求めよ．

(2) $x > 0$ のとき，不等式

$$\log x \geqq \frac{5x^2 - 4x - 1}{2x(x+2)}$$

が成り立つことを示せ．

(1) $t = e^x$ とおいて置換積分する　$dt = e^x dx$，$\begin{array}{c|c} x & 0 \to \log 3 \\ \hline t & 1 \to 3 \end{array}$

$$(与式) = \int_1^3 \frac{\frac{1}{t}}{t + \frac{5}{t} - 2}\,dt = \int_1^3 \frac{1}{t^2 - 2t + 5}\,dt$$

さらに，$s = t - 1$ とおいて置換積分　$ds = dt$，$\begin{array}{c|c} t & 1 \to 3 \\ \hline s & 0 \to 2 \end{array}$

$$(与式) = \int_0^2 \frac{ds}{s^2 + 4}$$

$s = 2\tan\theta$ とおいて置換積分　$ds = \dfrac{2\,d\theta}{\cos^2\theta}$，$\begin{array}{c|c} s & 0 \to 2 \\ \hline \theta & 0 \to \frac{\pi}{4} \end{array}$

$$(与式) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\,d\theta = \underline{\frac{\pi}{8}}\ /\!/$$

(2) $f(x) = \log x - \dfrac{5x^2 - 4x - 1}{2x(x+2)}$ とおくと，

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{(10x-4)\cdot 2x \cdot (x+2) - (5x^2-4x-1)(4x+4)}{4x^2(x+2)^2}$$

$$= \frac{(x-1)^3}{x^2(x+2)^2}$$

∴ $f'(x) = 0$ になるのは $x = 1$ のとき．

∴ 増減表は右のようになる

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | | ↘ | $0$ | ↗ |

∴ $x > 0$ のとき，$f(x) \geqq 0$

すなわち，$\log x \geqq \dfrac{5x^2 - 4x - 1}{2x(x+2)}$ が成り立つ　■