# 大阪府立大学

2015年 第2問　1枚目／3枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 異なる $n$ 個のものから異なる $r$ 個を取り出して並べる順列の総数

$$ {}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \qquad (\text{ただし } n \geqq r \geqq 1) $$

に関して以下の問いに答えよ.

(1) $k > r$ ならば ${}_kP_r = \dfrac{1}{r+1}({}_{k+1}P_{r+1} - {}_kP_{r+1})$ が成り立つことを示せ.

(2) ${}_rP_r + {}_{r+1}P_r + {}_{r+2}P_r + \cdots + {}_{n+r-1}P_r = \dfrac{{}_{n+r}P_{r+1}}{r+1}$ が成り立つことを示せ.

(3) 次の等式がすべての自然数 $k$ に対して成り立つような定数 $A$, $B$, $C$ を求めよ.

$$ k^4 = {}_{k+3}P_4 + A \times {}_{k+2}P_3 + B \times {}_{k+1}P_2 + C \times {}_kP_1 $$

(4) $\dfrac{1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4}{1+2+3+\cdots+n}$ を $n$ の3次式で表せ.

(1)
$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r+1}({}_{k+1}P_{r+1} - {}_kP_{r+1}) &= \frac{1}{r+1}\left\{(k+1)k(k-1)\cdots(k-r+1) - k(k-1)(k-2)\cdots(k-r)\right\} \\
&= \frac{1}{r+1}\cdot k(k-1)\cdots(k-r+1)\cdot\{k+1-(k-r)\} \\
&= k(k-1)\cdots(k-r+1) \\
&= {}_kP_r \quad ▨
\end{aligned}
$$

(2) (1)の結果を利用して,

$$
\begin{aligned}
{}_rP_r + {}_{r+1}P_r + {}_{r+2}P_r + \cdots + {}_{n+r-1}P_r &= {}_rP_r + \frac{1}{r+1}(\cancel{{}_{r+2}P_{r+1}} - {}_{r+1}P_{r+1}) \\
&\quad + \frac{1}{r+1}(\cancel{{}_{r+3}P_{r+1}} - \cancel{{}_{r+2}P_{r+1}}) \\
&\quad + \frac{1}{r+1}(\cancel{{}_{r+4}P_{r+1}} - \cancel{{}_{r+3}P_{r+1}}) \\
&\quad + \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \frac{1}{r+1}({}_{n+r}P_{r+1} - \cancel{{}_{n+r-1}P_{r+1}}) \\
&= {}_rP_r + \frac{1}{r+1}({}_{n+r}P_{r+1} - {}_{r+1}P_{r+1}) \\
&= \frac{1}{r+1}(\underbrace{(r+1)\cdot{}_rP_r}_{= {}_{r+1}P_{r+1}} + {}_{n+r}P_{r+1} - {}_{r+1}P_{r+1}) \\
&= \frac{{}_{n+r}P_{r+1}}{r+1} \quad ▨
\end{aligned}
$$

2015年 第2問　　2枚目／3枚

数理 石井K

**2** 異なる $n$ 個のものから異なる $r$ 個を取り出して並べる順列の総数

$${}_n\mathrm{P}_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \qquad (\text{ただし } n \geqq r \geqq 1)$$

に関して以下の問いに答えよ．

(1) $k > r$ ならば ${}_k\mathrm{P}_r = \dfrac{1}{r+1}({}_{k+1}\mathrm{P}_{r+1} - {}_k\mathrm{P}_{r+1})$ が成り立つことを示せ．

(2) ${}_r\mathrm{P}_r + {}_{r+1}\mathrm{P}_r + {}_{r+2}\mathrm{P}_r + \cdots + {}_{n+r-1}\mathrm{P}_r = \dfrac{{}_{n+r}\mathrm{P}_{r+1}}{r+1}$ が成り立つことを示せ．

(3) 次の等式がすべての自然数 $k$ に対して成り立つような定数 $A$，$B$，$C$ を求めよ．

$$k^4 = {}_{k+3}\mathrm{P}_4 + A \times {}_{k+2}\mathrm{P}_3 + B \times {}_{k+1}\mathrm{P}_2 + C \times {}_k\mathrm{P}_1$$

(4) $\dfrac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4}{1 + 2 + 3 + \cdots + n}$ を $n$ の 3 次式で表せ．

(3) $k^4 = (k+3)(k+2)(k+1)k + A(k+2)(k+1)k + B(k+1)k + Ck$

$= (k^2+3k)(k^2+3k+2) + A(k^3+3k^2+2k) + B(k^2+k) + Ck$

$= k^4 + 6k^3 + 11k^2 + 6k + Ak^3 + 3Ak^2 + 2Ak + Bk^2 + Bk + Ck$

$= k^4 + (A+6)k^3 + (3A+B+11)k^2 + (2A+B+C+6)k$

両辺の係数を比較して．

$$\begin{cases} A+6=0 \\ 3A+B+11=0 \\ 2A+B+C+6=0 \end{cases} \qquad \therefore \underline{A=-6,\ B=7,\ C=-1} \,/\!/$$

(4) (3) より．

$\underline{1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}({}_{k+3}P_4 - 6\cdot{}_{k+2}P_3 + 7\cdot{}_{k+1}P_2 - {}_kP_1)$

$= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$

$= \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}{}_{k+3}P_4\right) - 6\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}{}_{k+2}P_3\right) + 7\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}{}_{k+1}P_2\right) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n}{}_kP_1 \quad \cdots①$

(2) の結果に，$r=1,2,3,4$ をそれぞれ代入すると，

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}{}_{k+3}P_4 = \frac{{}_{n+4}P_5}{5},\ \sum_{k=1}^{n}{}_{k+2}P_3 = \frac{{}_{n+3}P_4}{4},\ \sum_{k=1}^{n}{}_{k+1}P_2 = \frac{{}_{n+2}P_3}{3},\ \sum_{k=1}^{n}{}_kP_1 = \frac{{}_{n+1}P_2}{2}$

∴① に代入して．$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4 = \frac{1}{5}(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)\cdot n - 6\cdot\frac{1}{4}(n+3)(n+2)(n+1)\cdot n$

$+7\cdot\frac{1}{3}(n+2)(n+1)n - \frac{1}{2}(n+1)n$

$= \frac{1}{30}n(n+1)\{6(n+2)(n+3)(n+4) - 45(n+3)(n+2) + 70(n+2) - 15\}$

# 大阪府立大学

2015年 第2問　3枚目／3枚

数理 石井K

**2** 異なる $n$ 個のものから異なる $r$ 個を取り出して並べる順列の総数

$${}_{n}\mathrm{P}_{r} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \qquad (\text{ただし } n \geqq r \geqq 1)$$

に関して以下の問いに答えよ．

(1) $k > r$ ならば ${}_{k}\mathrm{P}_{r} = \dfrac{1}{r+1}({}_{k+1}\mathrm{P}_{r+1} - {}_{k}\mathrm{P}_{r+1})$ が成り立つことを示せ．

(2) ${}_{r}\mathrm{P}_{r} + {}_{r+1}\mathrm{P}_{r} + {}_{r+2}\mathrm{P}_{r} + \cdots + {}_{n+r-1}\mathrm{P}_{r} = \dfrac{{}_{n+r}\mathrm{P}_{r+1}}{r+1}$ が成り立つことを示せ．

(3) 次の等式がすべての自然数 $k$ に対して成り立つような定数 $A$, $B$, $C$ を求めよ．

$$k^4 = {}_{k+3}\mathrm{P}_{4} + A \times {}_{k+2}\mathrm{P}_{3} + B \times {}_{k+1}\mathrm{P}_{2} + C \times {}_{k}\mathrm{P}_{1}$$

(4) $\dfrac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4}{1 + 2 + 3 + \cdots + n}$ を $n$ の3次式で表せ．

(4) のつづき

$$= \frac{1}{30}n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)$$

$$\therefore \frac{1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4}{1+2+3+\cdots+n} = \frac{\frac{1}{30}n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{\frac{1}{2}n(n+1)} \qquad \left(\because \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1) \text{ を使った}\right)$$

$$= \frac{1}{15}(6n^3+9n^2+n-1)$$

$$= \underline{\frac{2}{5}n^3 + \frac{3}{5}n^2 + \frac{1}{15}n - \frac{1}{15}} \ /\!/$$