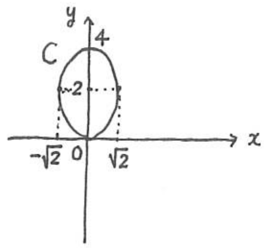
山口大学

2015年 理（数理科学）・医 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 曲線 $2x^2+y^2-4y=0$ を C とする．点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が曲線 C 上を動くとき，xy の最大値と最小値を求めなさい．



$$C:\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2}+\frac{(y-2)^2}{2^2}=1$$

∴ 点Pは右の楕円C上を動く

∴ $x=\sqrt{2}\cos\theta$，$y=2\sin\theta+2$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とおける．

xy を θ で表したものを $f(\theta)$ とおくと，

$$f(\theta)=\sqrt{2}\cos\theta(2\sin\theta+2)$$

$$\begin{aligned}
\therefore f'(\theta)&=-\sqrt{2}\sin\theta(2\sin\theta+2)+\sqrt{2}\cos\theta\cdot 2\cos\theta\\
&=-2\sqrt{2}\sin^2\theta-2\sqrt{2}\sin\theta+2\sqrt{2}(1-\sin^2\theta)\\
&=-4\sqrt{2}\sin^2\theta-2\sqrt{2}\sin\theta+2\sqrt{2}\\
&=-2\sqrt{2}(2\sin^2\theta+\sin\theta-1)\\
&=-2\sqrt{2}(2\sin\theta-1)(\sin\theta+1)
\end{aligned}$$

∴ $f'(\theta)=0$ となるのは，$\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5\pi}{6},\ \dfrac{3}{2}\pi$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	(2π)
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(\theta)$	$2\sqrt{2}$	↗	$\frac{3\sqrt{6}}{2}$	↘	$-\frac{3\sqrt{6}}{2}$	↗	0	↗	$(2\sqrt{2})$

$\theta=\dfrac{\pi}{6}\iff\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\\ y=3\end{cases}$，$\theta=\dfrac{5\pi}{6}\iff\begin{cases}x=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\\ y=3\end{cases}$

上の増減表より，xy の

最大値は $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$ $\left(x=\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ y=3\text{ のとき}\right)$，最小値は $-\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$ $\left(x=-\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ y=3\text{ のとき}\right)$ //