



2015年理(物・化)・工・情報第3問

1枚目/2枚

3 e を自然対数の底とし, $0 \leq x \leq e$ とする. 関数 $f(x) = \int_0^2 |e^t - x^2| dt$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) 定積分を計算し, $f(x)$ を x を用いて表せ.
 (2) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ. また, それらの値をとるときの x の値もそれぞれ求めよ.

(1) $e^t \geq x^2 \iff t \geq 2 \log x$ であるから.

$$0 \leq 2 \log x \leq 2 \text{ となるのは, } 1 \leq x \leq e$$

(i) $0 \leq x < 1$ のとき.

$0 \leq t \leq 2$ において, $e^t - x^2 \geq 0$ であるから.

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^2 e^t - x^2 dt \\ &= [e^t - tx^2]_0^2 \\ &= -2x^2 + e^2 - 1 \end{aligned}$$

(ii) $1 \leq x \leq e$ のとき.

$0 \leq t \leq 2 \log x$ において, $e^t - x^2 \leq 0$, $2 \log x \leq t \leq 2$ において, $e^t - x^2 \geq 0$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int_0^{2 \log x} -e^t + x^2 dx + \int_{2 \log x}^2 e^t - x^2 dt \\ &= [-e^t + tx^2]_0^{2 \log x} + [e^t - tx^2]_{2 \log x}^2 \\ &= -x^2 + 2x^2 \log x + 1 + e^2 - 2x^2 - x^2 + 2x^2 \log x \\ &= 4x^2(\log x - 1) + e^2 + 1 \end{aligned}$$

(i), (ii) より.

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 + e^2 - 1 & (0 \leq x < 1 \text{ のとき}) \\ 4x^2(\log x - 1) + e^2 + 1 & (1 \leq x \leq e \text{ のとき}) \end{cases}$$

—— //

いいかえると.

「積分区間内に $e^t - x^2 = 0$ となる

t が存在する」ということ.

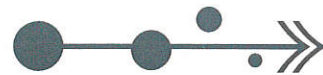
この t を $t = t_0$ とすると.

t_0 の前後で, $e^t - x^2$ の符号が

変わるのだから, 絶対値をはずすとき.

場合分けが必要となる.

2枚目につづく



2015年理(物・化)・工・情報第3問

2枚目 / 2枚

3 e を自然対数の底とし, $0 \leq x \leq e$ とする. 関数 $f(x) = \int_0^2 |e^t - x^2| dt$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) 定積分を計算し, $f(x)$ を x を用いて表せ.
 (2) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ. また, それらの値をとるときの x の値もそれぞれ求めよ.

(2) (1) の結果より.

(i) $0 \leq x < 1$ のとき.

$y = f(x)$ は, 上に凸の放物線より. 最大値は $e^2 - 1$ ($x=0$), 最小値はなし

(ii) $1 \leq x \leq e$ のとき.

$$f(x) = 4x^2(\log x - 1) + e^2 + 1$$

$$\therefore f'(x) = 8x(\log x - 1) + 4x$$

$$= 4x(2\log x - 1)$$

$$\therefore 1 \leq x \leq e \text{ より, } f'(x) = 0 \text{ となるのは, } x = \sqrt{e}$$

右の増減表より.

$$\text{最大値は } e^2 + 1 \text{ (} x = e \text{ のとき)}$$

$$\text{最小値は } (e-1)^2 \text{ (} x = \sqrt{e} \text{ のとき)}$$

x	1	...	\sqrt{e}	...	e
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$			↓		↑
			$(e-1)^2$		$e^2 + 1$

(i), (ii) より.

$$\begin{cases} \text{最大値は } e^2 + 1 \text{ (} x = e \text{ のとき)} \\ \text{最小値は } (e-1)^2 \text{ (} x = \sqrt{e} \text{ のとき)} \end{cases}$$

——”