0001989090108999

静岡大学

2015年 理（物・化）・工・情報 第3問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ e を自然対数の底とし，$0 \leqq x \leqq e$ とする．関数 $f(x) = \int_0^2 |e^t - x^2|\,dt$ について，次の問いに答えよ．

(1) 定積分を計算し，$f(x)$ を x を用いて表せ．

(2) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．また，それらの値をとるときの x の値もそれぞれ求めよ．

(1) $e^t \geqq x^2 \iff t \geqq 2\log x$ であるから．

$0 \leqq 2\log x \leqq 2$ となるのは，$1 \leqq x \leqq e$

いいかえると．「積分区間内に $e^t - x^2 = 0$ となる t が存在する」ということ．

この t を $t = t_0$ とすると．t_0 の前後で，$e^t - x^2$ の符号が変わるので，絶対値をはずすとき，場合分けが必要となる．

(i) $0 \leqq x < 1$ のとき．

$0 \leqq t \leqq 2$ において，$e^t - x^2 \geqq 0$ であるから．

$$f(x) = \int_0^2 e^t - x^2\,dt$$
$$= \left[e^t - tx^2\right]_0^2$$
$$= -2x^2 + e^2 - 1$$

(ii) $1 \leqq x \leqq e$ のとき．

$0 \leqq t \leqq 2\log x$ において，$e^t - x^2 \leqq 0$，$2\log x \leqq t \leqq 2$ において，$e^t - x^2 \geqq 0$

$$\therefore f(x) = \int_0^{2\log x} -e^t + x^2\,dx + \int_{2\log x}^2 e^t - x^2\,dt$$
$$= \left[-e^t + tx^2\right]_0^{2\log x} + \left[e^t - tx^2\right]_{2\log x}^2$$
$$= -x^2 + 2x^2\log x + 1 + e^2 - 2x^2 - x^2 + 2x^2\log x$$
$$= 4x^2(\log x - 1) + e^2 + 1$$

(i), (ii) より．

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 + e^2 - 1 & (0 \leqq x < 1 \text{ のとき}) \\ 4x^2(\log x - 1) + e^2 + 1 & (1 \leqq x \leqq e \text{ のとき}) \end{cases}$$ //

2枚目につづく

$\boxed{3}$ eを自然対数の底とし，$0 \leqq x \leqq e$とする．関数$f(x) = \int_0^2 |e^t - x^2|\,dt$について，次の問いに答えよ．

(1) 定積分を計算し，$f(x)$をxを用いて表せ．

(2) $f(x)$の最大値と最小値を求めよ．また，それらの値をとるときのxの値もそれぞれ求めよ．

(2) (1)の結果より．

(i) $0 \leqq x < 1$ のとき．

$y = f(x)$ は．上に凸の放物線より．最大値は e^2-1 $(x=0)$，最小値はなし

(ii) $1 \leqq x \leqq e$ のとき．

$f(x) = 4x^2(\log x - 1) + e^2 + 1$

$\therefore f'(x) = 8x(\log x - 1) + 4x$

$= 4x(2\log x - 1)$

$\therefore$ $1 \leqq x \leqq e$ より．$f'(x) = 0$ となるのは．$x = \sqrt{e}$

x	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$	e
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	e^2-3	↘	$(e-1)^2$	↗	e^2+1

右の増減表より．

最大値は e^2+1 $(x=e)$

最小値は $(e-1)^2$ $(x=\sqrt{e})$

(i), (ii) より．

$$\begin{cases} 最大値は\ e^2+1\ (x=e のとき) \\ 最小値は\ (e-1)^2\ (x=\sqrt{e} のとき) \end{cases}$$

—//