0001971188208999

埼玉大学

2015年 教育・経済学部 第2問　　1枚目／2枚

数理 石井K

2 四面体ABCDがある．線分AB，BC，CD，DA上にそれぞれ点P，Q，R，Sがある．点P，Q，R，Sは同一平面上にあり，四面体のどの頂点とも異なるとする．このとき下記の設問に答えよ．

(1) PQとRSが平行であるとき，等式

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1$$

が成り立つことを示せ．

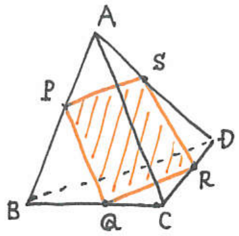
(2) PQとRSが平行でないとき，等式

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1$$

が成り立つことを示せ．

(1) $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$

とおく．



$AP:PB=s:(1-s)$,

$BQ:QC=t:(1-t)$,

$CR:RD=u:(1-u)$,

$DS:SA=v:(1-v)$ とおく．（s, t, u, v は $0<s, t, u, v<1$ をみたす実数）

このとき，$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}$

$=(1-t)\vec{b}+t\vec{c}-s\vec{b}$

$=(1-t-s)\vec{b}+t\vec{c}$

$\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{AS}-\overrightarrow{AR}$

$=(1-v)\vec{d}-(1-u)\vec{c}-u\vec{d}$

$=-(1-u)\vec{c}+(1-v-u)\vec{d}$

PQ // RS より，$\overrightarrow{PQ}=k\overrightarrow{RS}$ $(k\neq 0)$ と表せる．

$\therefore (1-t-s)\vec{b}+t\vec{c}=-k(1-u)\vec{c}+k(1-v-u)\vec{d}$

$\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ は一次独立より，

$$\begin{cases} 1-t-s=0 \\ t=-k(1-u) \\ 0=k(1-v-u) \end{cases}$$

$\therefore t=1-s$, $v=1-u$ （$\because k\neq 0$ より）

$$\therefore \frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=\frac{s}{1-s}\cdot\frac{t}{1-t}\cdot\frac{u}{1-u}\cdot\frac{v}{1-v}$$

$$=\frac{s}{1-s}\cdot\frac{1-s}{s}\cdot\frac{u}{1-u}\cdot\frac{1-u}{u}$$

$$=1 \quad ▨$$

2枚目につづく

2015年 教育・経済学部 第2問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 四面体ABCDがある．線分AB，BC，CD，DA上にそれぞれ点P，Q，R，Sがある．点P，Q，R，Sは同一平面上にあり，四面体のどの頂点とも異なるとする．このとき下記の設問に答えよ．

(1) PQとRSが平行であるとき，等式

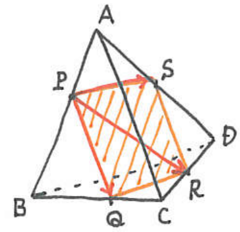
$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1$$

が成り立つことを示せ．

(2) PQとRSが平行でないとき，等式

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1$$

が成り立つことを示せ．



(2) PQ と RS が平行でないとき．

点 P, Q, R, S が同一平面上にあることから

$\vec{PR} = m\vec{PQ} + n\vec{PS}$ と表せる．$(m, n \neq 0)$

ここで，$\vec{PR} = \vec{AR} - \vec{AP}$

$= (1-u)\vec{c} + u\vec{d} - s\vec{b}$

$\vec{PQ} = (1-t-s)\vec{b} + t\vec{c}$ ← (1)で求めた

$\vec{PS} = \vec{AS} - \vec{AP}$

$= (1-v)\vec{d} - s\vec{b}$

よって，$-s\vec{b} + (1-u)\vec{c} + u\vec{d} = m(1-t-s)\vec{b} + mt\vec{c} + n(1-v)\vec{d} - ns\vec{b}$

ここで，$\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ は一次独立より．

$$\begin{cases} -s = m(1-t-s) - ns & \cdots ① \\ 1-u = mt & \cdots ② \\ u = n(1-v) & \cdots ③ \end{cases}$$

①+②+③より．$1-s = m(1-s) + n(1-s) - nv$

$\therefore (1-s)(m+n-1) = nv \quad \cdots ④$

$0<s, t, u, v<1$，$m, n \neq 0$ より．①から．$\dfrac{s}{1-t} = \dfrac{m}{m+n-1}$，②から $\dfrac{t}{1-u} = \dfrac{1}{m}$

③から $\dfrac{u}{1-v} = n$　④から $\dfrac{v}{1-s} = \dfrac{m+n-1}{n}$

$$\therefore \frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA} = \frac{s}{1-s}\cdot\frac{t}{1-t}\cdot\frac{u}{1-u}\cdot\frac{v}{1-v}$$

$$= \frac{v}{1-s}\cdot\frac{s}{1-t}\cdot\frac{t}{1-u}\cdot\frac{u}{1-v}$$

$$= \frac{m+n-1}{n}\cdot\frac{m}{m+n-1}\cdot\frac{1}{m}\cdot n$$

$$= 1 \quad ■$$