

2012年理工B方式第3問

数理
石井K

今回まわりくどく
かいたが、
もっと簡けつでも
よい。

3 k を正の定数とし、 x, y を実数とする。

- (1) 不等式 $|y| \leq -x^2 + 1$ の表す領域を図示せよ。
- (2) $k = 1$ のとき、不等式 $|x| + |y| \leq k$ の表す領域を図示せよ。
- (3) 命題「 $|y| \leq -x^2 + 1$ ならば $|x| + |y| \leq k$ 」が真であるための必要十分条件を k の不等式を用いて表せ。

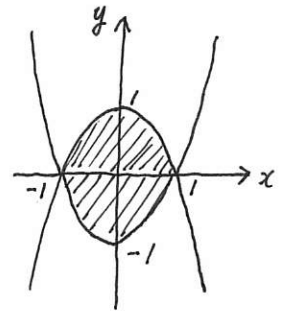
(1) (i) $y \geq 0$ の範囲では、

$$y \leq -x^2 + 1$$

(ii) $y < 0$ の範囲では、

$$-y \leq -x^2 + 1 \iff y \geq x^2 - 1$$

(i), (ii) より右図の斜線部分 (境界線を含む)



(2) $|x| + |y| \leq 1$ について

(i) $x, y \geq 0$ のとき、 (ii) $x \geq 0, y < 0$ のとき (iii) $x < 0, y \geq 0$ のとき

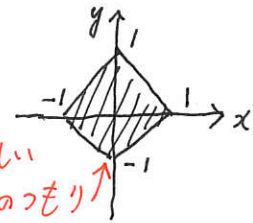
$$x + y \leq 1 \quad x - y \leq 1 \quad -x + y \leq 1$$

(iv) $x, y < 0$ のとき

$$-x - y \leq 1$$

以上より、右図の斜線部分 (境界線を含む)

見た目がおかしい
けど正方形のつもり



(3) (2) と同様にして、 $|x| + |y| \leq k$ が表す領域は

右図のようになる (境界線を含む)

(注) $k \leq 0$ のときは明らかに命題は成り立たないので、 $k > 0$ とした

● 必要条件 (図形の対称性より、 $x \geq 0, y \geq 0$ のときを考える)

(1) の斜線部分が (3) の斜線部に含まれればよい (接してもよい)

ので、第1象限において、 $y = -x^2 + 1$ と $y = -x + k$ が接する k を求めると、 $x^2 - x - 1 + k = 0$ 判別式を D とおくと、

$$D = 1 - 4(k - 1) = 0 \quad \therefore k = \frac{5}{4} \quad \therefore k \geq \frac{5}{4} \text{ であればよい}$$

● 十分条件 (同じく対称性より、 $x \geq 0, y \geq 0$ のときを考える)

$k \geq \frac{5}{4}$ のとき、必要条件のときの D を計算すると、 $D = -4k + 5$

$k \geq \frac{5}{4}$ のときなので、 $D \leq 0$ したがって十分性もみたす。

$$\therefore k \geq \frac{5}{4}$$

