長崎大学

2013年 第3問

$\boxed{3}$ n を2以上の整数とする．n 個の実数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n が与えられたとき，

$$P_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2, \quad Q_n = {a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2$$

とおく．次に，$1 \leqq i < j \leqq n$ を満たすすべての番号 i，j に対する $a_i a_j$ の和を R_n とする．たとえば，$R_2 = a_1 a_2$，$R_3 = a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3$ である．同様に，$1 \leqq i < j \leqq n$ を満たすすべての番号 i，j に対する $(a_i - a_j)^2$ の和を S_n とする．たとえば，$S_2 = (a_1 - a_2)^2$，$S_3 = (a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_3)^2$ である．次の問いに答えよ．

(1) P_4 を Q_4 と R_4 を使って表せ．

(2) すべての $n \geqq 2$ に対して $S_n = (n-1)Q_n - 2R_n$ と表されることを，数学的帰納法で証明せよ．

(3) Q_4 を P_4 と S_4 を使って表せ．

(4) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$ のとき，Q_4 の最小値と，そのときの a_1，a_2，a_3，a_4 の値をそれぞれ求めよ．