東京理科大学

2012 年 理（数理情報科） 第 1 問

1 $\boxed{}$ 内のカタカナにあてはまる 0 から 9 までの数字を求めよ．

(1) k を自然数とすると，不等式

$$k > \frac{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}{2}$$

が成立する．この不等式の右辺の逆数は $\boxed{ア}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-\boxed{イ}}\right)$ であるから，不等式

$$\frac{1}{k} < \boxed{ア}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-\boxed{イ}}\right)$$

を得る．この不等式がすべての自然数 k に対して成立することより，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \boxed{ウ}$$

であることがわかる．

(2) 自然数 n に対し，

$$a_n = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(m+n+1)}, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

と定める．

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ を求めよ．

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)s_{n+1}$ を求めよ．

（ヒント：$n \geqq 2$ であるような各自然数 n に対して $s_{n+1}-s_n$ を考えることにより，(i)の結果が使える形に変形せよ．）

(iii) n を自然数とする．また，p は自然数で，等式

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+n+1}\right) = s_p$$

が成立しているとする．このとき，p を n の 1 次式の形に表せ．

(iv) n を自然数とし，p は(iii)における通りであるとする．また，q は自然数で，等式

$$a_n = \frac{s_p}{q}$$

が成立しているとする．このとき，q を n の 1 次式の形に表せ．

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ を求めよ．