岐阜薬科大学

2014 年 薬学部 第 4 問

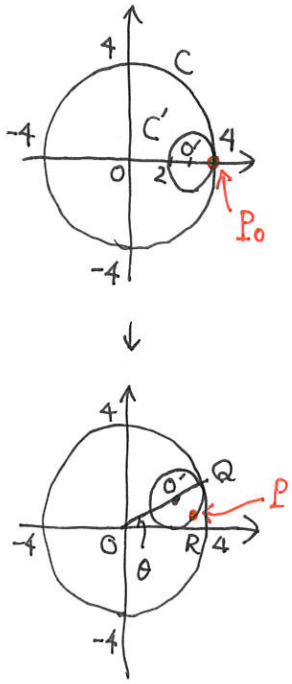
数理 石井K

$\boxed{4}$ xy 平面において，原点Oを中心とする半径4の円 C の内側を半径1の円 C' が内接しながら滑ることなく転がるとき，円 C' 上の点Pが描く曲線を X とする．ただし，点Pのはじめの位置は点 $P_0(4,\ 0)$ とする．円 C' の中心 O' が原点Oの周りを θ だけ回転したときの点Pの座標を $(x,\ y)$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{OO'}$ の成分を θ を用いて表せ．

(2) $x,\ y$ を θ を用いて表せ．

(3) 点Pにおける曲線 X の接線と x 軸，y 軸との交点をそれぞれQ，Rとするとき，線分QRの長さは一定であることを示せ．ただし，点Pは座標軸上の点ではないものとする．



(1) $OO'=3$ より．

$$\overrightarrow{OO'}=(3\cos\theta,\ 3\sin\theta)$$ //

(2) OO' と円 C の O' 側の交点を Q とおく

また，$(4,0)$ を R とおくと

弧 $\overset{\frown}{QR}=4\theta$

C' の弧 PQ は $\overset{\frown}{PQ}=4\theta$ となる．

$\therefore \angle PO'Q\times 1=4\theta$

$\therefore \overrightarrow{O'P}=(\cos(-3\theta),\ \sin(-3\theta))$

$\therefore \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P}=(3\cos\theta+\cos3\theta,\ 3\sin\theta-\sin3\theta)$

$\therefore x=3\cos\theta+\cos3\theta,\ y=3\sin\theta-\sin3\theta$ //

$\begin{cases} x=4\cos^3\theta \\ y=4\sin^3\theta \end{cases}$ でもOK

(3) (2) より．$\dfrac{dx}{d\theta}=-3\sin\theta-3\sin3\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta}=3\cos\theta-3\cos3\theta$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=-\dfrac{\cos\theta-\cos3\theta}{\sin\theta+\sin3\theta}$　接線は $y=-\dfrac{\cos\theta-\cos3\theta}{\sin\theta+\sin3\theta}\{x-(3\cos\theta+\cos3\theta)\}+3\sin\theta-\sin3\theta$

$\therefore Q\left(\dfrac{2(1-\cos4\theta)}{\cos\theta-\cos3\theta},\ 0\right)$，$R\left(0,\ \dfrac{2(1-\cos4\theta)}{\sin\theta+\sin3\theta}\right)$

けっこう大変な計算

$\therefore QR^2=\left\{\dfrac{1}{(\cos\theta-\cos3\theta)^2}+\dfrac{1}{(\sin\theta+\sin3\theta)^2}\right\}\cdot4(1-\cos4\theta)^2=16$　$\therefore QR=4$ (一定) //