

2012年 歯・薬学部 (前期) 第1問

1 次の数の大小を比べ、空欄に不等号を入れなさい。

$$(1) \sqrt[3]{16} \quad \boxed{\text{ア}} \quad \sqrt[4]{32}$$

$$(2) \log_3 10 \quad \boxed{\text{イ}} \quad \log_9 90$$

$$(3) 2 \quad \boxed{\text{ウ}} \quad \log_3 5 + \log_5 3$$

$$(1) \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2^{\frac{4}{3}}, \quad \sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^5} = 2^{\frac{5}{4}}$$

ともに正なのでそれぞれ12乗して大小比較すると、

$$(2^{\frac{4}{3}})^{12} = 2^{16}, \quad (2^{\frac{5}{4}})^{12} = 2^{15}$$

$$\therefore \sqrt[3]{16} > \sqrt[4]{32}$$

$$(2) \log_9 90 = \frac{\log_3 90}{\log_3 9} = \frac{1}{2}(2 + \log_3 10) = 1 + \frac{1}{2} \log_3 10$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_3 10 - \log_9 90 &= \log_3 10 - (1 + \frac{1}{2} \log_3 10) \\ &= \frac{1}{2} \log_3 10 - 1 \\ &= \log_3 \frac{\sqrt{10}}{3} \end{aligned}$$

$$\text{ここで、} 3 < \sqrt{10} < 4 \text{ より、} \log_3 \frac{\sqrt{10}}{3} > 0$$

$$\therefore \log_3 10 > \log_9 90$$

$$\begin{aligned} (3) \log_3 5 + \log_5 3 &= \log_3 5 + \frac{1}{\log_3 5} \\ &\geq 2 \sqrt{\log_3 5 \cdot \frac{1}{\log_3 5}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

($\log_3 5 > 0$ なので、相加・相乗平均の関係を使った
等号成立は $\log_3 5 = \frac{1}{\log_3 5} \iff \log_3 5 = 1$ となり、成立しない)

$$\therefore \log_3 5 + \log_5 3 > 2$$