



2016年人文学部第1問

1 $\vec{a} = (1, -2, 1)$, $\vec{b} = (1, 0, 1)$, $\vec{c} = (1, -1, 0)$ とする。また、実数 s, t, u に対して $\vec{x} = \vec{a} + s\vec{b}$, $\vec{y} = \vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$ とする。

- (1) \vec{x} の大きさが最小となるときの s の値を求めよ。
 (2) \vec{a} と \vec{x} が 120° の角をなすときの s の値を求めよ。
 (3) \vec{y} が \vec{a} にも \vec{b} にも垂直となるときの t, u の値を求めよ。

$$(1) |\vec{a}|^2 = 1^2 + (-2)^2 + 1^2 = 6, |\vec{b}|^2 = 1^2 + 0^2 + 1^2 = 2, \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 + 0 + 1 = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore |\vec{x}|^2 &= |\vec{a} + s\vec{b}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 + 2s\vec{a} \cdot \vec{b} + s^2|\vec{b}|^2 \\ &= 2s^2 + 4s + 6 \\ &= 2(s+1)^2 + 4 \end{aligned}$$

$$\therefore |\vec{x}| \text{ が最小となるのは } \underline{s = -1} //$$

$$\begin{aligned} (2) \vec{a} \cdot \vec{x} &= \vec{a} \cdot (\vec{a} + s\vec{b}) \\ &= |\vec{a}|^2 + s\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= 2s + 6 \end{aligned}$$

$$\therefore \cos 120^\circ = \frac{\vec{a} \cdot \vec{x}}{|\vec{a}||\vec{x}|} \text{ より, } -\frac{1}{2} = \frac{2s+6}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2s^2+4s+6}}$$

$$\therefore 2s+6 < 0 \text{ かつ } \frac{1}{4} = \frac{4s^2+24s+36}{6(2s^2+4s+6)}$$

$$\therefore s < -3 \text{ かつ } s^2 + 18s + 27 = 0$$

$$\therefore s < -3 \text{ かつ } s = -9 \pm 3\sqrt{6}$$

$$2 < \sqrt{6} < 3 \text{ より, } \underline{s = -9 - 3\sqrt{6}} //$$

$$(3) \vec{y} = (1+t+u, -2-u, 1+t)$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{y}$ はいずれも $\vec{0}$ と異なるので、

$$\vec{y} \cdot \vec{a} = 1+t+u+4+2u+1+t = 2t+3u+6 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\vec{y} \cdot \vec{b} = 1+t+u+1+t = 2t+u+2 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } \underline{t=0, u=-2} //$$