北海道大学

2013年 理系 第1問

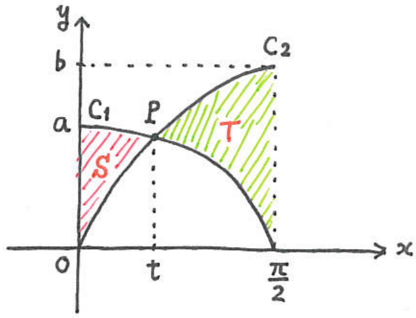
数理 石井K

$\boxed{1}$ a と b を正の実数とする．$y = a\cos x\ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフを C_1，$y = b\sin x\ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフを C_2 とし，C_1 と C_2 の交点を P とする．

(1) P の x 座標を t とする．このとき，$\sin t$ および $\cos t$ を a と b で表せ．

(2) C_1，C_2 と y 軸で囲まれた領域の面積 S を a と b で表せ．

(3) C_1，C_2 と直線 $x = \dfrac{\pi}{2}$ で囲まれた領域の面積を T とする．このとき，$T = 2S$ となるための条件を a と b で表せ．



(1) $a\cos t = b\sin t$ が成り立つので両辺2乗して．

$a^2\cos^2 t = b^2\sin^2 t$

$\therefore a^2(1-\sin^2 t) - b^2\sin^2 t = 0$

$\therefore \sin^2 t = \dfrac{a^2}{a^2+b^2}$

$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ より．$\sin t \geqq 0$ $\therefore$ $\underline{\sin t = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}$ // このとき．$\underline{\cos t = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}$ //

(2) $S = \displaystyle\int_0^t a\cos x - b\sin x\, dx$

$= \Big[a\sin x + b\cos x\Big]_0^t$

$= a\sin t + b\cos t - b$

$= \underline{\sqrt{a^2+b^2} - b}$ //

(3) $T = \displaystyle\int_t^{\frac{\pi}{2}} b\sin x - a\cos x\, dx$

$= \Big[-b\cos x - a\sin x\Big]_t^{\frac{\pi}{2}}$

$= -a + b\cos t + a\sin t$

$= \sqrt{a^2+b^2} - a$

$T = 2S$ より．$\sqrt{a^2+b^2} - a = 2\sqrt{a^2+b^2} - 2b$

$\therefore 2b - a = \sqrt{a^2+b^2}$　両辺を2乗して整理すると．$b(3b-4a) = 0$　$b>0$ より $\underline{b = \dfrac{4}{3}a}$ //

このとき．$2b - a = \dfrac{5}{3}a > 0$ をみたす．　$(a>0,\ b>0)$