豊橋技術科学大学

2011 年 工学部 第 2 問

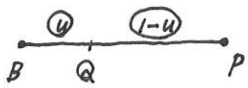
$\boxed{2}$ 空間に 2 点 $A\left(0,\ 0,\ \dfrac{3}{2}\right)$, $B(0,\ 0,\ 2)$ と，xy 平面上を動く点 $P(s,\ t,\ 0)$ がある．また，線分 BP を $u:(1-u)$ に内分する点を Q とする．ただし，s と t は実数であり，$0<u<1$ である．

(1) 点 Q の座標を u, s, t を用いて表せ．

(2) $|\overrightarrow{AQ}|=|\overrightarrow{AB}|$ を満たす u を s と t を用いて表せ．

(3) 点 Q が yz 平面に平行な平面 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ 上にあり，かつ $|\overrightarrow{AQ}|=|\overrightarrow{AB}|$ が成り立つとき，点 P は必ずある円 C の上にある．円 C の中心の座標と半径を求めよ．

(1) $\overrightarrow{OQ}=(1-u)\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OP}$



$=\underline{(su,\ tu,\ 2-2u)}$ //

(2) $|\overrightarrow{AB}|=2-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$ より. $|\overrightarrow{AQ}|^2=(su)^2+(tu)^2+\left(\dfrac{1}{2}-2u\right)^2$

$=(s^2+t^2+4)u^2-2u+\dfrac{1}{4}$

$\therefore |\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AQ}|^2$ より. $u\{(s^2+t^2+4)u-2\}=0$ $0<u<1$ より $\underline{u=\dfrac{2}{s^2+t^2+4}}$ //

(3) $su=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ より $s\neq 0$ なので $u=\dfrac{\sqrt{3}}{4s}$ これを (2) で求めた式に代入して.

$$\frac{\sqrt{3}}{4s}=\frac{2}{s^2+t^2+4} \iff \sqrt{3}(s^2+t^2+4)=8s$$

$$\iff s^2+t^2+4-\frac{8}{3}\sqrt{3}s=0$$

$$\iff \left(s-\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2+t^2=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$\therefore$ $\underline{円の中心は \left(\dfrac{4}{3}\sqrt{3}, 0, 0\right), 半径は \dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$ //