広島大学

2013年 文系 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)=\log_2(x+1)$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) 0以上の整数 k に対して，$f(x)=\dfrac{k}{2}(f(1)-f(0))$ を満たす x を k を用いて表せ．

(2) (1)で求めた x を x_k とおく．$S_n=\sum_{k=1}^{n} k(x_k-x_{k-1})$ を n を用いて表せ．

(1) $\log_2(x+1)=\frac{k}{2}(\log_2 2-\log_2 1)$

$\therefore \log_2(x+1)=\frac{k}{2}$

$\therefore x+1=2^{\frac{k}{2}}$ $\quad\therefore \underline{x=2^{\frac{k}{2}}-1}$ //

(2) $S_n=\sum_{k=1}^{n} k\left(2^{\frac{k}{2}}-2^{\frac{k-1}{2}}\right)$

$=\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{\frac{k-1}{2}}\cdot(\sqrt{2}-1)$

$=(\sqrt{2}-1)\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{\frac{k-1}{2}}$

$T_n=\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{\frac{k-1}{2}}$ とおくと．

$T_n= 1+2\cdot 2^{\frac{1}{2}}+3\cdot 2^{1}+4\cdot 2^{\frac{3}{2}}+\cdots+n\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}$ $\cdots$①

$\sqrt{2}\,T_n= 1\cdot 2^{\frac{1}{2}}+2\cdot 2^{1}+3\cdot 2^{\frac{3}{2}}+\cdots+(n-1)\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}+n\cdot 2^{\frac{n}{2}}$ $\cdots$②

①−②より． $(1-\sqrt{2})T_n=1+2^{\frac{1}{2}}+2^{1}+2^{\frac{3}{2}}+\cdots+2^{\frac{n-1}{2}}-n\cdot 2^{\frac{n}{2}}$

$=\dfrac{1-(\sqrt{2})^n}{1-\sqrt{2}}-n\cdot 2^{\frac{n}{2}}$

$\therefore T_n=\dfrac{1-(\sqrt{2})^n}{(1-\sqrt{2})^2}-\dfrac{n\cdot(\sqrt{2})^n}{1-\sqrt{2}}$

$S_n=(\sqrt{2}-1)T_n$

$=\dfrac{(\sqrt{2})^n-1}{1-\sqrt{2}}+n\cdot(\sqrt{2})^n$

$=\underline{(n-1-\sqrt{2})\cdot 2^{\frac{n}{2}}+1+\sqrt{2}}$ //