



2014年医学部第4問

4 以下の問いに答えよ.

(1) n を正の整数として、以下の問いに答えよ. ただし、自然対数の底 e は無理数であることを証明せずに用いてよい.

(i) 等式 $\int_0^1 t^n e^t dt = a_n e + b_n$ が成り立つ整数 a_n, b_n がただ1組存在することを示せ.

(ii) $a_{n+1}b_n - a_nb_{n+1}$ の値を求めよ.

(2) 区間 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ で連続な関数 $f(x)$ に対し、等式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$ が成り立つことを証明せよ. さらに、それを利用して次の定積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin x + \cos x} dx$$