0002290729077999

愛媛大学

2016年 教育（中等教育自然科学系） 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 放物線 $C : y = x^2 + 2ax + b$ について次の問いに答えよ．ただし，a，b は実数とする．

(1) 放物線 C 上の点 $(t,\ t^2 + 2at + b)$ を通る接線の方程式を求めよ．

(2) 平面上の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ から C に相異なる2本の接線 ℓ_1，ℓ_2 が引けるとする．

（i）p，q は $q < p^2 + 2ap + b$ を満たすことを示せ．

（ii）ℓ_1 と ℓ_2 が直交するとき，q を a と b を用いて表せ．

(1) $y' = 2x + 2a$

∴ 接点が $(t, t^2 + 2at + b)$ のとき，接線は．

$y = (2t + 2a)(x - t) + t^2 + 2at + b$

∴ $\underline{y = 2(t+a)x - t^2 + b}$ //

(2) (1)で求めた接線が $\mathrm{P}(p, q)$ を通るとき，

$q = 2(t+a)p - t^2 + b$

∴ $t^2 - 2pt - 2ap - b + q = 0$ …(*)

(i) (*)を t の方程式とみて，判別式を D とおくと，

相異なる2本の接線 ℓ_1, ℓ_2 が引けることより，$D > 0$

∴ $D/4 = p^2 - (-2ap - b + q) > 0$

∴ $q < p^2 + 2ap + b$ が成り立つ ▨

(ii) (*)の実数解を α, β $(\alpha < \beta)$ とおくと，

$\ell_1 \perp \ell_2$ より，(ℓ_1の傾き)・(ℓ_2の傾き) $= -1$

∴ $2(\alpha + a) \cdot 2(\beta + a) = -1 \iff \alpha\beta + a(\alpha + \beta) + a^2 = -\frac{1}{4}$ …(**)

(*)において，解と係数の関係より，$\alpha + \beta = 2p$，$\alpha\beta = -2ap - b + q$

(**)に代入して，$-2ap - b + q + 2ap + a^2 = -\frac{1}{4}$

∴ $\underline{q = b - a^2 - \frac{1}{4}}$ //