

2016年 コンピュータ理工 第3問

数理
石井

3 関数 $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ のグラフと x 軸によって囲まれた部分を A とする。このとき、以下の空欄をうめよ。

- (1) 等式 $\frac{1-x^2}{1+x^2} = a + \frac{b}{1+x^2}$ が、 x についての恒等式となるように定数 a, b を定めると、 $a = \boxed{-1}$ 、 $b = \boxed{2}$ である。
- (2) A の面積は $\boxed{\pi - 2}$ である。
- (3) A を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は $\boxed{(2\log 2 - 1)\pi}$ である。

$$\begin{aligned} (1) \text{ (右辺)} &= \frac{a(1+x^2)+b}{1+x^2} \\ &= \frac{ax^2+a+b}{1+x^2} \end{aligned}$$

$$\therefore a = -1 \text{ かつ } a+b=1$$

$$\therefore \underline{a = -1, b = 2}$$

(2) $y = -1 + \frac{2}{1+x^2}$ より、グラフは y 軸に関して対称で

$x \geq 0$ において、単調減少

また、 $y = 0$ となるのは、 $x = \pm 1$

\therefore グラフは右のようになり、 A の面積 S は、

$$S = 2 \int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2} dx$$

$$= 2 \int_0^1 -1 + \frac{2}{1+x^2} dx$$

$$= 2 [-x]_0^1 + 4 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

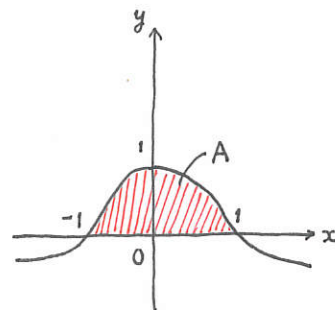
$$= -2 + 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta$$

$$= -2 + 4 [\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \underline{\pi - 2}$$

(3) $y = -1 + \frac{2}{1+x^2}$ より、 $x^2 = \frac{2}{y+1} - 1$

$$\therefore V = \pi \int_0^1 x^2 dy = \pi \int_0^1 \left(\frac{2}{y+1} - 1 \right) dy = \pi [2 \log |y+1| - y]_0^1 = \underline{(2 \log 2 - 1)\pi}$$



$x = \tan \theta$ において置換積分する

$$dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta, \quad \begin{array}{l} x=0 \rightarrow 0 \\ x=1 \rightarrow \frac{\pi}{4} \end{array}$$