0001695724038999

2014 年 第 4 問　　1枚目/2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ $f(x) = \int_x^{x+1} t \cdot |t|\, dt$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $f(0)$ と $f(-1)$ を求めよ．

(2) $f'(x)$ を求めよ．

(3) $f(x)$ を求めよ．

(4) 座標平面において曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = f(-1)$ で囲まれる部分のうち，$-2 \leqq x \leqq -1$ の範囲の面積を S_1，$-1 \leqq x \leqq 0$ の範囲の面積を S_2，$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲の面積を S_3 とする．S_1，S_2，S_3 を求めよ．

(1) $f(0) = \int_0^1 t \cdot |t|\, dt$　ここで $0 \leqq t \leqq 1$ において $|t| = t$ より．

$= \int_0^1 t^2\, dt$

$= \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1$

$= \underline{\frac{1}{3}}$ //

$f(-1) = \int_{-1}^0 t \cdot |t|\, dt$　ここで $-1 \leqq t \leqq 0$ において $|t| = -t$ より

$= \int_{-1}^0 -t^2\, dt$

$= \left[-\frac{t^3}{3} \right]_{-1}^0$

$= \underline{-\frac{1}{3}}$ //

(2) (i) $x \geqq 0$ のとき．

$f(x) = \int_x^{x+1} t^2\, dt$ より　$f'(x) = (x+1)^2 - x^2 = 2x + 1$

(ii) $x \leqq -1$ のとき

$f(x) = \int_x^{x+1} -t^2\, dt$ より　$f'(x) = -(x+1)^2 - (-x^2) = -2x - 1$

(iii) $-1 \leqq x \leqq 0$ のとき．

$f(x) = \int_x^0 -t^2\, dt + \int_0^{x+1} t^2\, dt$ より，　$f'(x) = x^2 + (x+1)^2$

$= 2x^2 + 2x + 1$

$$\therefore f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & (x \geqq 0) \\ -2x - 1 & (x \leqq -1) \\ 2x^2 + 2x + 1 & (-1 \leqq x \leqq 0) \end{cases}$$ //

0001695724038999

岡山県立大学

2014 年 第 4 問　　2枚目/2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ $f(x)=\int_x^{x+1} t\cdot|t|\,dt$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $f(0)$ と $f(-1)$ を求めよ．

(2) $f'(x)$ を求めよ．

(3) $f(x)$ を求めよ．

(4) 座標平面において曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=f(-1)$ で囲まれる部分のうち，$-2\leqq x\leqq -1$ の範囲の面積を S_1，$-1\leqq x\leqq 0$ の範囲の面積を S_2，$0\leqq x\leqq 1$ の範囲の面積を S_3 とする．S_1，S_2，S_3 を求めよ．

(3) (2) より．

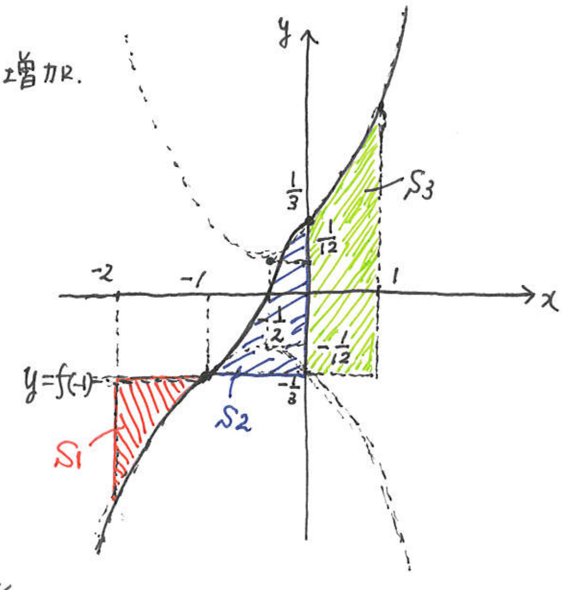
$$f(x)=\begin{cases} x^2+x+C & (x\geqq 0) \\ -x^2-x+D & (x\leqq -1) \\ \frac{2}{3}x^3+x^2+x+E & (-1\leqq x\leqq 0)\end{cases}$$
(C, D, E は積分定数) と表されるが

(1) より．$f(0)=\frac{1}{3}$，$f(-1)=-\frac{1}{3}$ なので，$C=\frac{1}{3}$，$D=-\frac{1}{3}$，$E=\frac{1}{3}$

$$\therefore f(x)=\begin{cases} x^2+x+\frac{1}{3} & (x\geqq 0) \\ -x^2-x-\frac{1}{3} & (x\leqq -1) \\ \frac{2}{3}x^3+x^2+x+\frac{1}{3} & (-1\leqq x\leqq 0)\end{cases}$$ //

(4) $g(x)=\frac{2}{3}x^3+x^2+x+\frac{1}{3}$ とおくと．

$g'(x)=x^2+(x+1)^2>0$　$\therefore g(x)$：単調増加．



$$S_1=\int_{-2}^{-1} -\frac{1}{3}-\left(-x^2-x-\frac{1}{3}\right)dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{-1}$$
$$=\frac{5}{6}$$ //

$$S_2=\int_{-1}^{0} \frac{2}{3}x^3+x^2+x+\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{6}x^4+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{3}$$ //

$$S_3=\int_0^1 x^2+x+\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x\right]_0^1=\frac{3}{2}$$ //