京都工芸繊維大学

2010 年 第 4 問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 次の問いに答えよ.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$ を求めよ.

(2) 実数 a に対して定積分 $\displaystyle\int_0^2 \left|\frac{1}{1+e^x}-\frac{1}{1+e^a}\right| dx$ の値を $S(a)$ とおく. a が $0 \leqq a \leqq 2$ の範囲を動くとき, $S(a)$ の最小値を求めよ.

(1) $$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\,dx$$
$$= \int 1-\frac{e^x}{1+e^x}\,dx$$
$$= \underline{x-\log(1+e^x)+C \quad (C\text{は積分定数})}\ //$$

ポイント
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)|+C$$

$1+e^x \geqq 2>0$ より, ここでは絶対値の中身は正である.

(2) $\dfrac{1}{1+e^x}$ は単調減少の関数で, $\dfrac{1}{1+e^x}=\dfrac{1}{1+e^a}$ となるのは, $x=a$ のときであるから,

$0 \leqq x \leqq a$ では, $\dfrac{1}{1+e^x}-\dfrac{1}{1+e^a} \geqq 0$

$x>a$ では, $\dfrac{1}{1+e^x}-\dfrac{1}{1+e^a}<0$ となる.

よって. $$S(a)=\int_0^a \frac{1}{1+e^x}-\frac{1}{1+e^a}\,dx+\int_a^2 \frac{1}{1+e^a}-\frac{1}{1+e^x}\,dx$$
$$=\left[x-\log(1+e^x)-\frac{x}{1+e^a}\right]_0^a+\left[\frac{x}{1+e^a}-x+\log(1+e^x)\right]_a^2$$
$$=a-\log(1+e^a)-\frac{a}{1+e^a}+\log 2+\frac{2}{1+e^a}-2+\log(1+e^2)-\frac{a}{1+e^a}+a-\log(1+e^a)$$
$$=\frac{2-2a}{1+e^a}-2\log(1+e^a)+\log(1+e^2)+2a-2+\log 2$$

$$\therefore S'(a)=\frac{-2(1+e^a)-(2-2a)e^a}{(1+e^a)^2}-\frac{2e^a}{1+e^a}+2$$
$$=\frac{2e^a(a-1)}{(1+e^a)^2}$$

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$$S(1)=-2\log(1+e)+\log(1+e^2)+\log 2=\log\frac{2(1+e^2)}{(1+e)^2}$$

$\therefore$ 右の増減表 より, $S(a)$ の最小値は,

$$\underline{S(1)=\log\frac{2(1+e^2)}{(1+e)^2}}\ //$$