2012年 第2問

2 五角形OABCDにおいて，$\angle O=\angle B=\angle C=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle A=\dfrac{3\pi}{4}$，OA = OD = 1，AB = BCが成り立つとする．ACとBDの交点をEとし，ACを $m:1-m$ に内分する点をPとする．ただし，$0<m<1$ である．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OD}=\vec{d}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{d}$ で表せ．

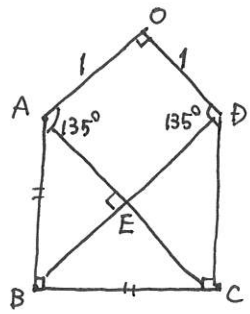
(2) $\cos\angle BOP$ を求めよ．

(3) $m \neq \dfrac{1}{4}$ のとき，三角形OBPの面積を求めよ．

(1) 5角形の内角の和は 540° であることから，

$\angle D = 135^\circ$ となる．

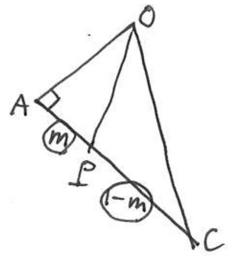
∴ 図形は右のようになる．



OAEDは正方形になるので，

$\overrightarrow{OE}=\vec{a}+\vec{d}$ $\quad |\overrightarrow{OE}|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2}$ なので

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OE}$ $\quad$ ∴ $\overrightarrow{OB}=2\vec{a}+\vec{d}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{a}+2\vec{d}$



$$\therefore \overrightarrow{OP}=(1-m)\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OC}$$
$$=\vec{a}+2m\vec{d}$$

(2) $\cos\angle BOP=\dfrac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OP}|}$ $\quad\cdots(*)$

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}=(2\vec{a}+\vec{d})\cdot(\vec{a}+2m\vec{d})$ $\quad$ $|\vec{a}|^2=|\vec{d}|^2=1$，$\vec{a}\cdot\vec{d}=0$ より

$=2+2m$

$|\overrightarrow{OB}|^2=5$，$|\overrightarrow{OP}|^2=1+4m^2$ $\quad$ ∴ (*)に代入して．$\cos\angle BOP=\dfrac{2(m+1)}{\sqrt{5(4m^2+1)}}$

(3) (2)より $\sin^2\angle BOP=1-\dfrac{4(m+1)^2}{5(4m^2+1)}=\dfrac{(4m-1)^2}{5(4m^2+1)}$

$$\therefore \sin\angle BOP=\frac{|4m-1|}{\sqrt{5(4m^2+1)}}$$

$$\therefore \triangle OBP=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{4m^2+1}\cdot\frac{|4m-1|}{\sqrt{5(4m^2+1)}}=\frac{1}{2}|4m-1|$$