2015年 医学部 第5問



$\boxed{5}$ すべての実数 $x$ において，関数 $f(x)$ は微分可能で，その導関数 $f'(x)$ は連続とする．$f(x)$，$f'(x)$ が等式

$$\int_0^x \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt = -e^{-x}+f(x)$$

を満たすとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ と直線 $x=1$，および $x$ 軸，$y$ 軸で囲まれた部分を，$y$ 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ．

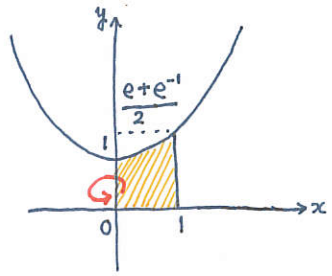
(1) 両辺を $x$ で微分すると，$\sqrt{1+(f'(x))^2} = e^{-x}+f'(x)$

両辺を2乗して，$1+(f'(x))^2 = e^{-2x}+2e^{-x}f'(x)+(f'(x))^2$

$\therefore\ f'(x) = \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$　　$\therefore\ f(x) = \dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})+C$ （$C$は積分定数）

元の式に $x=0$ を代入すると．$f(0)=1$ となるので $C=0$　$\therefore\ \underline{f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})}$ //

(2) $V = (円柱) - \displaystyle\int_1^{\frac{e+e^{-1}}{2}} \pi x^2\,dy$

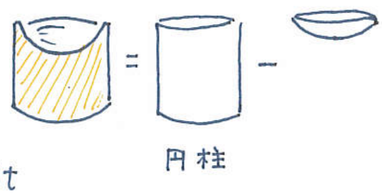



ここで(1)より．$y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ より．

$(e^x)^2-2ye^x+1=0$

$\therefore\ x=\log(y+\sqrt{y^2-1})$

$\therefore\ V = \pi\cdot 1^2\cdot\dfrac{e+e^{-1}}{2} - \displaystyle\int_1^{\frac{e+e^{-1}}{2}} \pi\{\log(y+\sqrt{y^2-1})\}^2\,dy$




$y=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ とおいて置換積分する．$\begin{array}{c|c} y & 1 \to \frac{e+e^{-1}}{2} \\ \hline t & 0 \to 1 \end{array}$，$dy=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}dt$

$$V = \frac{e^2+1}{2e}\pi - \pi\int_0^1 \frac{1}{2}\cdot t^2\cdot(e^t-e^{-t})\,dt$$

$$= \frac{e^2+1}{2e}\pi - \frac{\pi}{2}\int_0^1 t^2(e^t+e^{-t})'\,dt$$

$$= \frac{e^2+1}{2e}\pi - \frac{\pi}{2}\Big[t^2(e^t+e^{-t})\Big]_0^1 + \frac{\pi}{2}\int_0^1 2t(e^t-e^{-t})'\,dt$$

$$= \frac{e^2+1}{2e}\pi - \frac{e^2+1}{2e}\pi + \frac{\pi}{2}\Big[2t(e^t-e^{-t})\Big]_0^1 - \frac{\pi}{2}\int_0^1 2(e^t-e^{-t})\,dt$$

$$= \frac{e^2-1}{e}\pi - \pi\Big[e^t+e^{-t}\Big]_0^1$$

$$= \underline{2\pi\left(1-\frac{1}{e}\right)}\ //$$