0000203906979999

岡山県立大学

2011 年 第 1 問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．

(1) $\sqrt{n^2+27}$ が整数であるような自然数 n をすべて求めよ．

(2) a を実数とする．$x>0$ で定義された連続関数 $f(x)$ が，すべての $x>0$ に対して

$$\int_1^x f(t)\,dt=(\log x)^2+a^3x-2a-4$$

を満たすとき，a の値と $f(x)$ を求めよ．

(1) $\sqrt{n^2+27}=k$ (k：整数) とすると，両辺 2 乗して

$n^2+27=k^2 \iff (k+n)(k-n)=27$

$k>n$ と，$\begin{cases} k+n>k-n \\ k+n,\ k-n：整数 \end{cases}$ より　$(k+n, k-n)=(9, 3), (27, 1)$

(i) $k+n=9$，$k-n=3$ のとき．

$2k=12$　$\therefore k=6$ このとき $n=3$　これは条件をみたしている

(ii) $k+n=27$，$k-n=1$ のとき

$2k=28$　$\therefore k=14$ このとき $n=13$　これは条件をみたしている

(i)，(ii) より．$\underline{n=3, 13}$ //

(2) 両辺を x で微分すると，$f(x)=2\cdot\log x\cdot\dfrac{1}{x}+a^3$

$$\therefore f(x)=\frac{2\log x}{x}+a^3 \quad \cdots (*)$$

$$\int_1^x f(t)\,dt=\int_1^x \frac{2\log t}{t}+a^3\,dt$$

$$=\Big[(\log t)^2+a^3t\Big]_1^x$$

$$=(\log x)^2+a^3x-a^3 \qquad \therefore -a^3=-2a-4$$

$$\therefore (a-2)(\underbrace{a^2+2a+2}_{=(a+1)^2+1>0})=0 \qquad \therefore \underline{a=2}\ //$$

(*) より

このとき．$\underline{f(x)=\dfrac{2\log x}{x}+8}$ //